Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Galerkin-basierte Zeitintegration für den Starrkörper in Quaternionenformulierung

Marvin May | Masterarbeit (2024)

Motivation

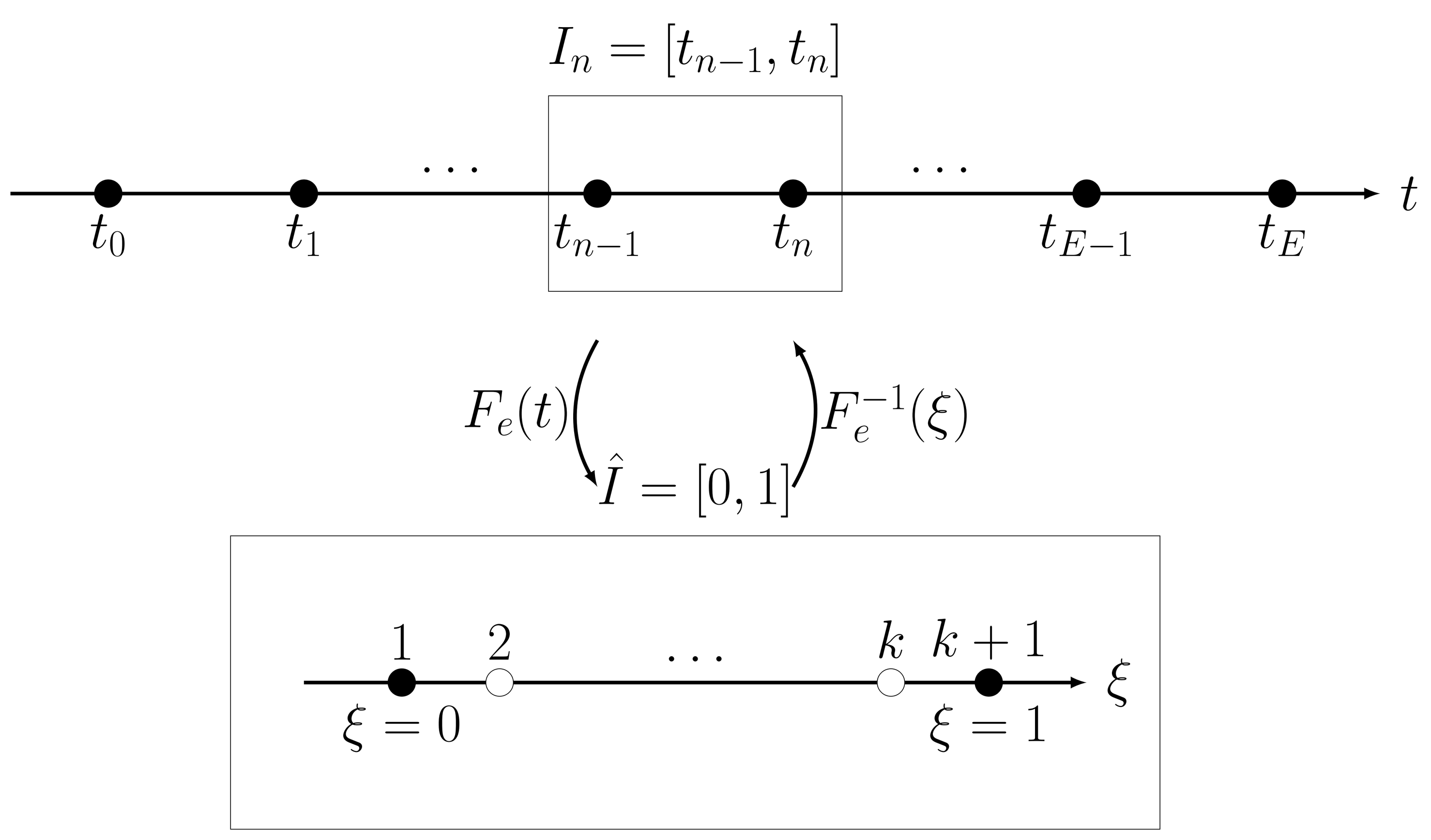
Basierend auf dem Galerkin-Verfahren können Finite Elemente mit beliebig hohen Ansatzfunktionen zur Approximation von Anfangswertproblemen generiert werden. Durch die Kombination dieser Eigenschaft mit der singularitätenfreien Beschreibung von Rotationen mittels Quaternionen lassen sich effektive Zeitintegratoren entwickeln.

Galerkin-Verfahren und Finite Elemente für AWP

- Anfangswertpoblem (w)

Gesucht ist $\mathbf{u}(t) \in V_g$, sodass gilt: $\int_{t_0}^{t_E} (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall \quad \mathbf{v} \in V_0$

- Partitionierung des Zeitintervalls und Berechnung auf einem Referenzelement $\hat{I} = [0, 1]$



- Mixed-Galerkin-Verfahren $mG(k)$ nach [1]

$$[\mathbf{x}_h, \mathbf{p}_h] \in \mathcal{P}^k(t_{n-1}, t_n)$$
$$[\delta\mathbf{x}_h, \delta\mathbf{p}_h, \delta\boldsymbol{\lambda}_h, \delta\boldsymbol{\gamma}_h] \in \mathcal{P}^{k-1}(t_{n-1}, t_n)$$
$$[\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\gamma}_h] \in \mathcal{P}^{k-1}(t_{n-1}, t_n)$$

Starrkörperrotationen mittels Quaternionen

- Allgemeine Quaternionen $\mathbb{H}$

$$\mathbb{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = [q_0, \mathbf{q}] \in \mathbb{H}$$

- Einheitsquaternionen entsprechen der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^4$

$$S^3 = \left\{ \mathbb{q} \in \mathbb{R}^4 : \|\mathbb{q}\| = 1 \right\}$$

- Parametrisierung des Rotationstensors mittels Einheitsquaternionen [2]

$$\mathbf{R}(\mathbb{q}) = \left[q_0^2 - \mathbf{q}\mathbf{q}\right]\mathbf{I} + 2q_0\hat{\mathbf{q}} + 2\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$$

- Kinetische Energie des Starrkörpers

$$T = T_{Trans} + T_{Rot} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}$$

- Quaternionenformulierung der Winkelgeschwindigkeit $\mathbb{\Omega} \in \mathbb{H}_0$

$$\mathbb{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} = 2\mathbf{Q}_l(\mathbb{q})^T\dot{\mathbb{q}}$$

- Rotationsenergie des Starrkörpers in Quaternionenformulierung

$$T_{Rot} = 2\dot{\mathbb{q}}^T\mathbf{Q}_l(\mathbb{q})\mathbf{J}_4\mathbf{Q}_l(\mathbb{q})^T\dot{\mathbb{q}} = 2\dot{\mathbb{q}}^T\mathbf{M}_4(\mathbb{q})\dot{\mathbb{q}}$$

- Rotationsenergie im Impulsphasenraum [3]

$$T_{Rot}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \frac{1}{8}\mathbb{p}^T\mathbf{M}_4(\mathbb{q})^{-1}\mathbb{p}$$

- Einheitsquaternionen werden durch holonome Zwangsbedingung eingehalten

$$g(\mathbb{q}) = \frac{1}{2}(\mathbb{q} \cdot \mathbb{q} - 1)$$

- Hamilton-Funktion

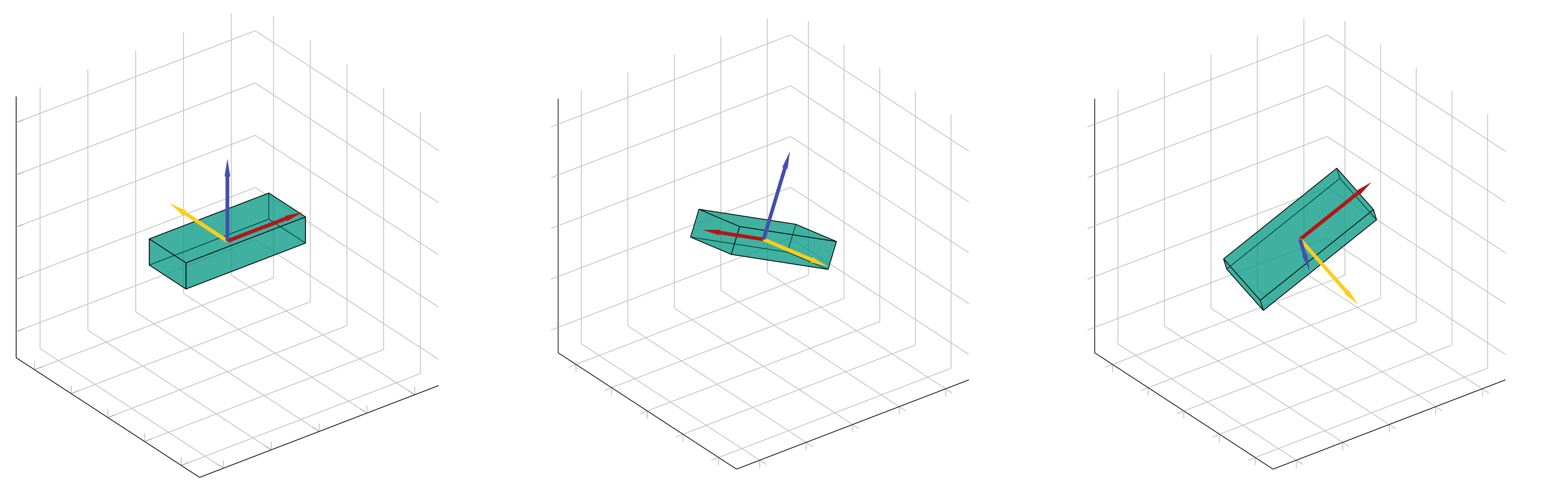
$$H(\mathbf{x}, \mathbb{q}, \mathbf{p}, \mathbb{p}) = T_{Rot}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) + T_{Trans}(\mathbf{p}) + V(\mathbf{x}, \mathbb{q})$$

- Erweiterte Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}_a = H(\mathbf{x}, \mathbb{q}, \mathbf{p}, \mathbb{p}) + \lambda g(\mathbb{q}) + \mu\tilde{g}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$$

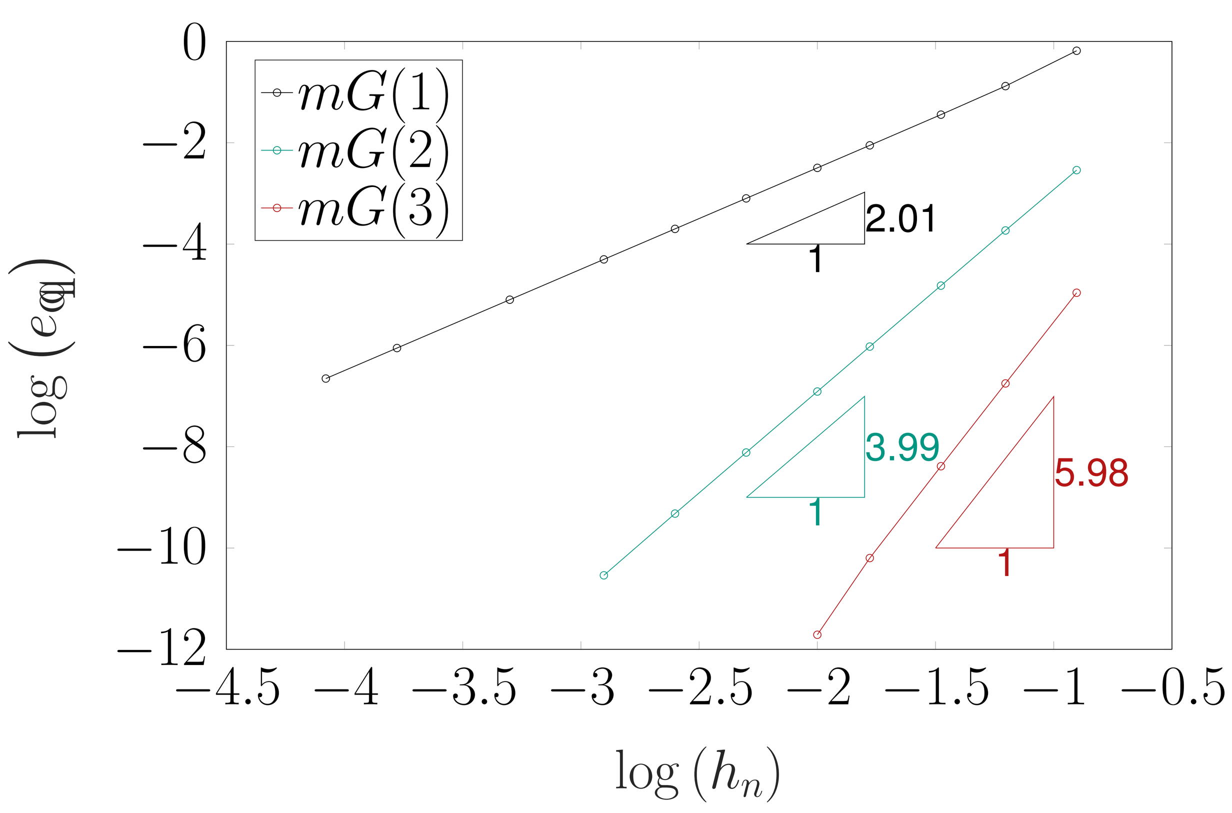
- Aus partiellen Ableitungen folgt DAE als Bewegungsgleichung

Numerisches Beispiel: Starrkörperroation



$t = 0$ $t = 2$ $t = 5$

- Konvergenz des Fehlers in der Endrotation



Literatur

[1] Betsch, P. und Steinmann, P. Conservation properties of a time FE method—part III: Mechanical systems with holonomic constraints. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(10): 2271–2304, 2002.

[2] Betsch P. und Siebert, R. Rigid body dynamics in terms of quaternions: Hamiltonian formulation and conserving numerical integration. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(4): 444–473, 2009.

[3] Nielsen, M. B. und Krenk, S. Conservative integration of rigid body motion by quaternion parameters with implicit constraints. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(8): 734–752, 2012.