

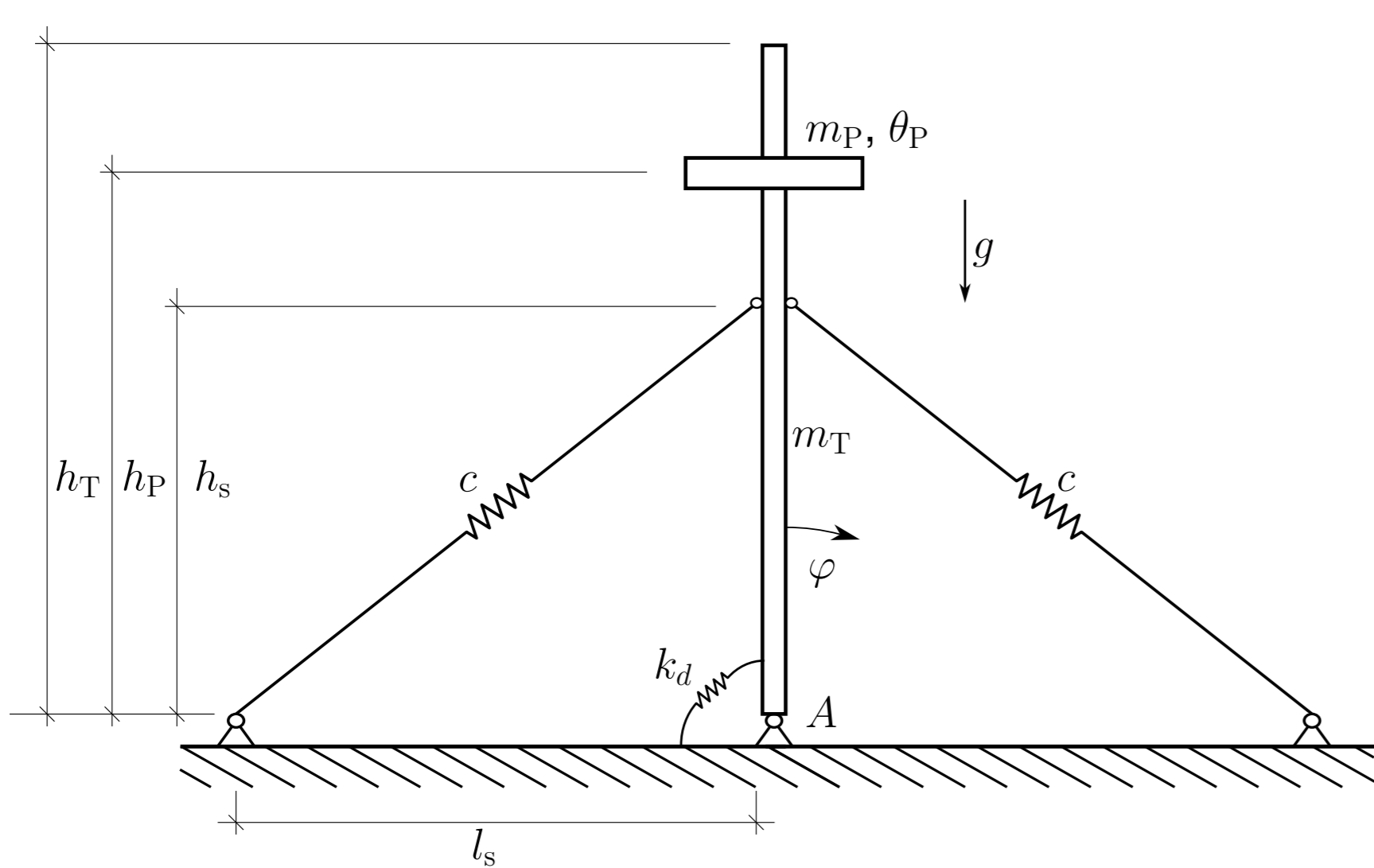
Schwingungsverhalten eines abgespannten Mastes

Numerische Untersuchung geometrischer Nichtlinearitäten und energieerhaltende Zeitintegration

Jonas Prandl | Bachelor Thesis (2023)

Problembeschreibung

Untersucht wird das Schwingungsverhalten eines mit Seilen abgespannten Mastes und der Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten. Dabei wird der Mast als zweidimensionales System modelliert, wobei die Abspannseile zunächst als linear elastische Federn idealisiert werden.



Man erhält die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{\theta_{\text{ges}}^{(A)}} \left[k_d \varphi - g \sin(\varphi) \left(\frac{h_T}{2} m_T + h_P m_P \right) + c l_s h_s l_0 \cos(\varphi) \left(\frac{1}{\sqrt{l_s^2 - 2l_s h_s \sin(\varphi) + h_s^2}} - \frac{1}{\sqrt{l_s^2 + 2l_s h_s \sin(\varphi) + h_s^2}} \right) \right] = 0,$$

wobei l_0 die spannungsfreie Länge der Seile beschreibt und $\theta_{\text{ges}}^{(A)}$ das gesamte Massenträgheitsmoment um den Fußpunkt. Um den Einfluss der Nichtlinearitäten zu ermitteln, wird die Bewegungsgleichung linearisiert und anschließend analytisch gelöst.

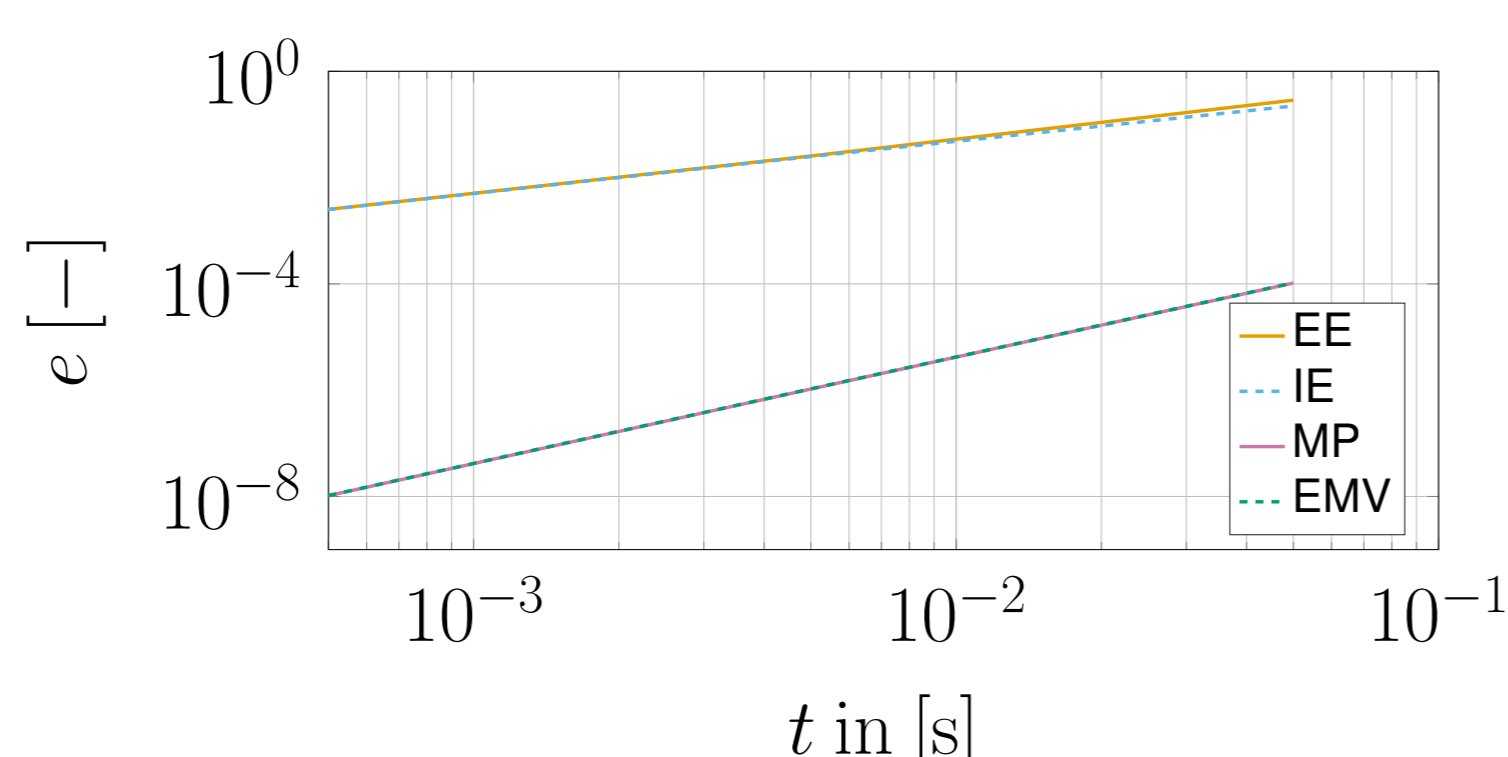
Numerische Zeitintegration

Die numerische Lösung erfolgt mithilfe des impliziten und expliziten Euler-Verfahrens (IE & EE), der Mittelpunkregel (MP) und eines Energy-Momentum-Verfahrens (EMV)

$$\begin{bmatrix} \varphi_{k+1} - \varphi_k \\ \theta_{\text{ges}}^{(A)} (v_{k+1} - v_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h v_{k+\frac{1}{2}} \\ -h \frac{DV}{D\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{DV}{D\varphi} := \frac{V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k)}{\varphi_{k+1} - \varphi_k},$$

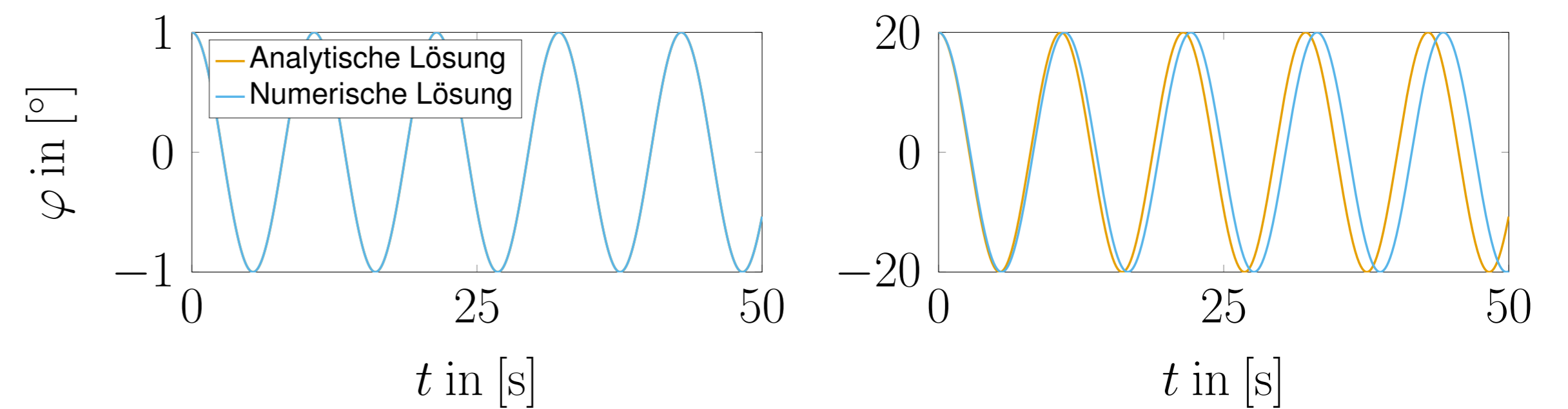
der Zeitschrittweite h und $v = \dot{\varphi}$.

Aufgrund des geringen relativen Fehlers e , der quadratischen Konvergenz und der energieerhaltenden Eigenschaft wird das EMV den anderen Verfahren bevorzugt.



Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten

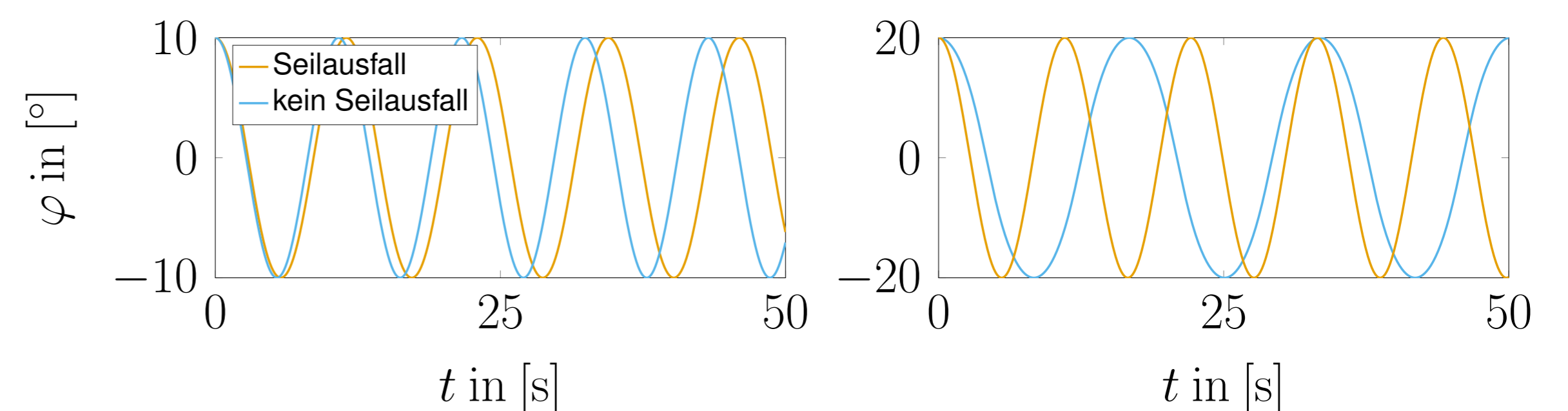
Ein Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung liefert, dass die Linearisierung mit zunehmender Maximalauslenkung eine schlechtere Lösung liefert.



Dabei liegt der Fehler in der Verlängerung der Periodendauer der numerischen Lösung T_{num} , während die Periodendauer der analytischen Lösung T_{ana} konstant bleibt.

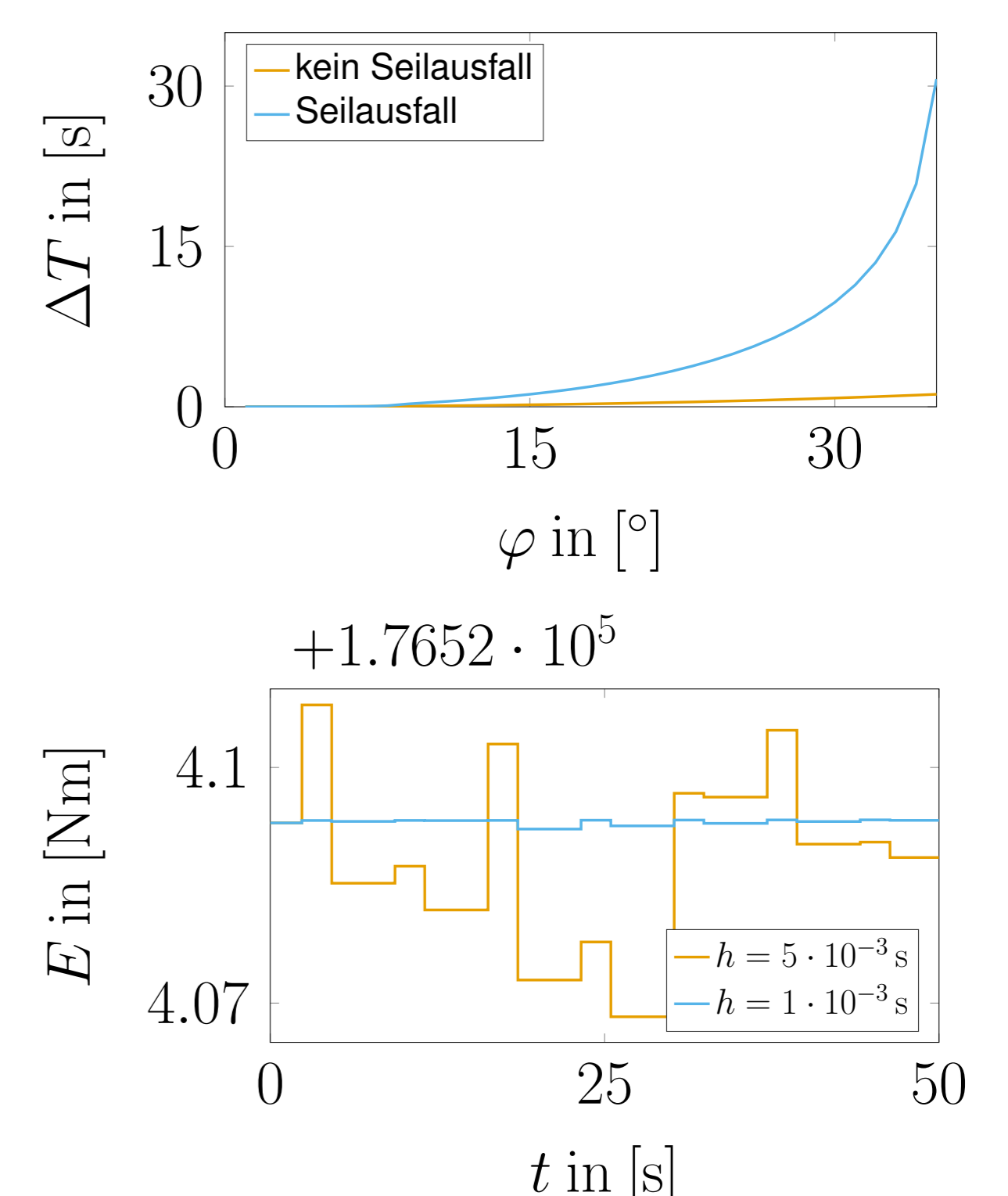
System mit Seilausfall

In Realität können die bisher als Federn idealisierten Seile keine Druckkräfte aufnehmen. Durch Betrachtung des Seilausfalls verlängert sich die Periodendauer des Systems, da weniger Rückstellkräfte wirken. Mit steigender Anfangsauslenkung steigt der Anteil der Schwingung, in dem nur ein Seil wirkt.



Auffällig ist, dass der Fehler sichtbar größer ist als bei dem System ohne Seilausfall, was sich bei Betrachtung von $\Delta T = T_{\text{num}} - T_{\text{ana}}$ erkennen lässt.

Bei der numerischen Lösung lassen sich unterschiedliche Energieniveaus für verschiedene Abschnitte der Schwingung erkennen. Dies ist auf die Zeitdiskretisierung zurückzuführen, durch die der Zeitpunkt des Seilausfalls nicht genau getroffen wird. Durch die Wahl einer kleineren Zeitschrittweite h können diese Zeitpunkte genauer getroffen werden, wodurch der Sprung der Gesamtenergie E kleiner wird.



Literatur

- [1] BURG, K., HAF, H., WILLE, F. und MEISTER, A. *Höhere Mathematik für Ingenieure: Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013.
- [2] GONZALEZ, O. Time integration and discrete Hamiltonian systems. In: *Journal of Nonlinear Science*, 6(5): 449–467, 1996.
- [3] GROSS, D., HAUGER, W. und WRIGGERS, P. *Technische Mechanik 4*. Berlin: Springer Vieweg, 2023.