Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Gemischte Finite-Elemente-Methode für die Dynamik quasi-inkompressibler, linear-viskoelastischer Systeme

Tim Pleßke | Bachelor Thesis (2024)

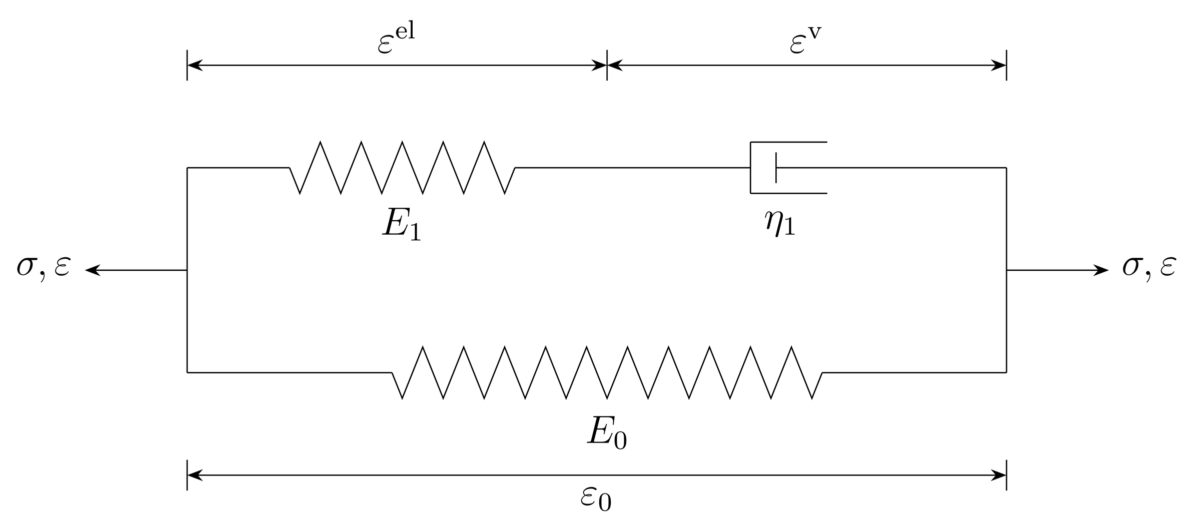
Motivation

Elastomere werden aufgrund ihrer vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten zunehmend im Bauingenieurwesen eingesetzt. Dabei weisen Sie inkompressibles, linear-viskoelastisches Materialverhalten auf, was bei verschiebungsbasierten FE-Formulierungen zu *Locking* führt.

In dieser Arbeit wird das gemischte $Q1P0$-Element mit linear-viskoelastischem Materialverhalten kombiniert, um das numerische Problem des *Lockings* zu reduzieren. Zusätzlich wird die Energiekonsistenz im Diskreten abgebildet.

Lineare Viskoelastizität

Poynting-Thomson-Modell 1D



- Konstitutives Gesetz

$$\sigma = (E_0 + E_1)\varepsilon - E_1 \varepsilon^{\mathrm{v}}$$

- Evolutionsgleichung

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{v}} = E_1(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{v}})$$

Erweiterung Poynting-Thomson-Modell 2D [2]

- Viskoelastisches Modell 1: viskose Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{v}}$ volumetrisch-deviatorisch gemischte Größe ($V1$)

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda_0 + \lambda_1)\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2(\mu_0 + \mu_1)\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{v}})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}} = \frac{1}{\eta_1}\left(\lambda_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{v}})\mathbf{I} + 2\mu_1(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{v}})\right)$$

- Viskoelastisches Modell 2: viskose Dehnung $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}}$ rein deviatorische Größe ($V2$)

$$\boldsymbol{\sigma} = (K_0 + K_1)\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2(\mu_0 + \mu_1)\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\right) - 2\mu_1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{v}} = \operatorname{dev}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}}) = \frac{2\mu_1}{\eta_1}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}}\right)$$

Quasi-Inkompressibilität - Gemischte Formulierung

- Betrachtung viskoelastisches Modell 2
- Volumendehnung

$$\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{div}(\mathbf{u}) \approx 0$$

- Substitution hydrostatischer Druck p [1]

$$p = (K_0 + K_1)\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = (K_0 + K_1)\operatorname{div}(\mathbf{u})$$

- Angepasstes konstitutives Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = p\,\mathbf{I} + 2(\mu_0 + \mu_1)\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}\right) - 2\mu_1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{v}}$$

- Gemischte Formulierung ($Q1V2P0$)

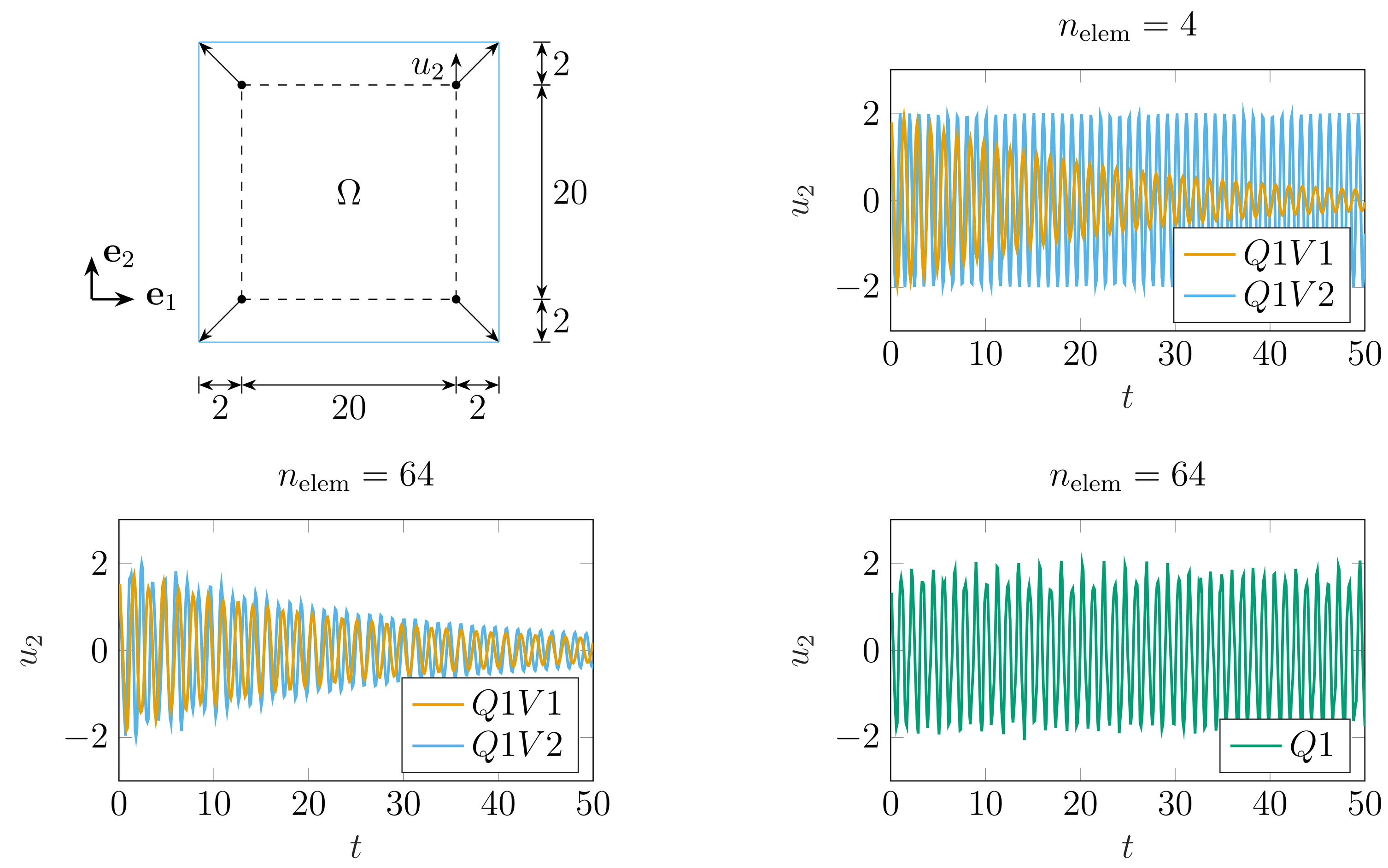
$$\begin{cases} \mathbf{b} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho\ddot{\mathbf{u}} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) - \frac{p}{K_0 + K_1} = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

  - Zeitliche Diskretisierung mittels impliziter Mittelpunktregel
  - Räumliche Diskretisierung mittels FEM (Bubnov-Galerkin-Verfahren)
    - Kontinuierliche lineare Approximationsansätze für die Verschiebung $\mathbf{u}$
    - Diskontinuierliche konstante Approximationsansätze für den hydrostatischen Druck p

Numerische Untersuchungen

Ebene quadratische Scheibe

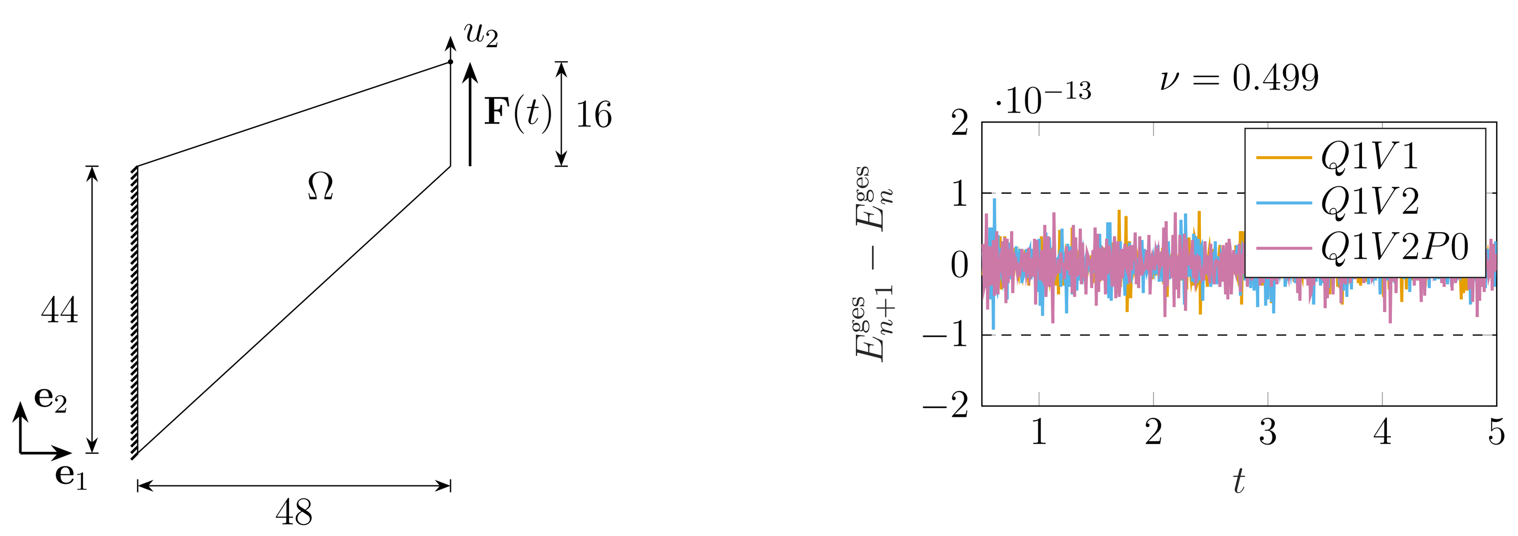
- Referenzkonfiguration und vorgebene Anfangsdeformation (links oben) sowie Verschiebung u_2 für verschiedene Elementanzahlen



- Volumetrischer Anfangsdeformationszustand wird aufgrund der Wellenausbreitung während der Simulation zu volumetrisch-deviatorischem Zustand
  $\Rightarrow$ $n_{\mathrm{elem}} = 4$: auch für $t > 0$ rein volumetrisch aufgrund Systemsymmetrie
  $\Rightarrow$ Höhere Elementanzahl führt zu realitätsnäherem Materialverhalten

Cooks-Membran

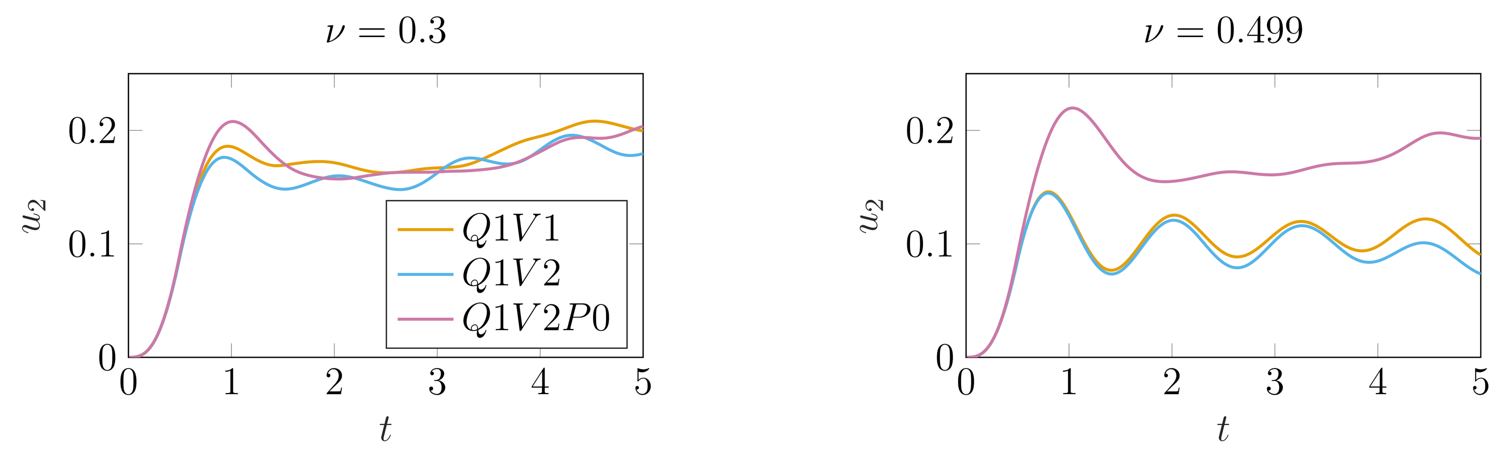
- Referenzkonfiguration (links) und Energiedifferenz zwischen zwei diskreten Zeitschritten (rechts)



- Belastung durch zeitabhängige Last

$$\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{e}_2 \;\text{ mit }\; F(t) = \begin{cases} 10\sin(\pi t) & \text{für } 0 \le t < 0.5 \\ 0 & \text{für } 0.5 \le t \le 5 \end{cases}$$

- Verschiebung u_2 in Abhängigkeit der Zeit (für $\nu \approx 0.5$ wird *Locking* bei $Q1V1$ und $Q1V2$ sichtbar)



Fazit

Gemischtes $Q1V2P0$-Element zeigt

- signifikante Abschwächung des *Lockings*
- Energiekonsistenz mit impliziter Mittelpunktregel

Literatur

[1] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Publications, 2000. ISBN: 9780486411811.

[2] SIMO, J. C. und HUGHES, T. J. *Computational inelasticity.* Bd. 7. Springer Science & Business Media, 2006.