

# Theoretische und numerische Untersuchung einer 8-Knoten Petrov-Galerkin Finite-Element-Formulierung zur Simulation ebener linear-elastischer Festkörper

Jakob Hammes | Bachelorarbeit (2024)

## Motivation

Ein Problem bei der Anwendung der klassischen Bubnov-Galerkin FEM ist deren Netzabhängigkeit. Für ein qualitativ hochwertiges Ergebnis wird ein unverzerrtes Netz benötigt, was jedoch nicht immer gewährleistet werden kann. Hier wird daher eine mögliche Lösung für dieses Problem untersucht, die auf einer Petrov-Galerkin FE-Formulierung basiert.

## Grund für Netzabhängigkeit [1]

Die Approximation des Verschiebungsfelds bei Verwendung des 8-Knoten Serendipity-Elements (QUAD8), einer Bubnov-Galerkin FE-Formulierung, lautet

$$u_1^{h,e} = \sum_{a=1}^8 \hat{N}_a u_{1a} = \gamma_1 + \gamma_2 \xi + \gamma_3 \eta + \gamma_4 \xi^2 + \gamma_5 \eta^2 + \gamma_6 \xi \eta + \gamma_7 \xi^2 \eta + \gamma_8 \xi \eta^2.$$

Ein quadratisches Verschiebungsfeld hat bei einer Winkelverzerrung des Elements allerdings die Form

$$u_1^e = \delta_1 + \delta_2 \xi + \delta_3 \eta + \delta_4 \xi^2 + \delta_5 \eta^2 + \delta_6 \xi \eta + \delta_7 \xi^2 \eta + \delta_8 \xi \eta^2 + \delta_9 \xi^2 \eta^2.$$

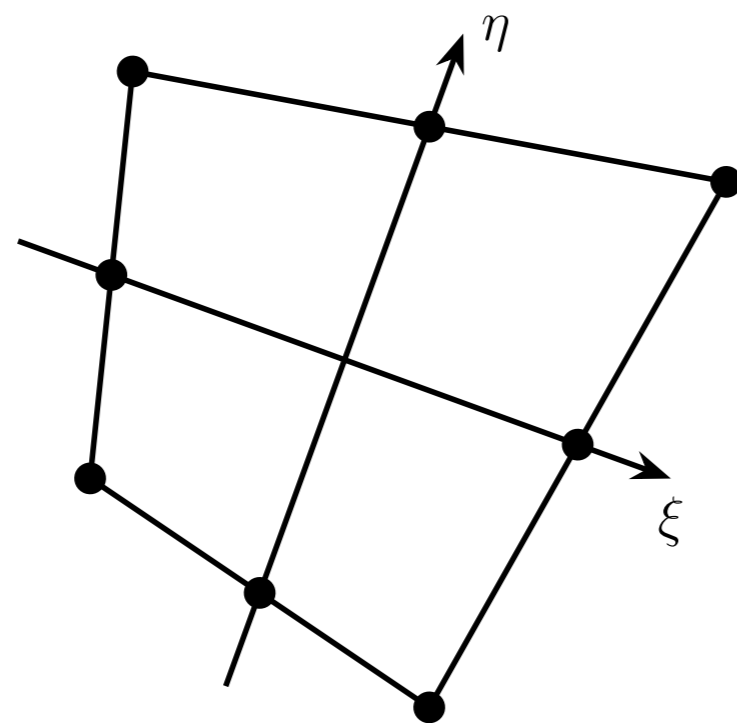


Abbildung 1: 8-Knoten Element unter Winkelverzerrung.

Vergleicht man, unter Vernachlässigung der von  $\xi$  und  $\eta$  unabhängigen Konstanten  $\delta_1 - \delta_9$  bzw.  $\gamma_1 - \gamma_8$ , die Terme höchster Ordnung, erkennt man, dass das QUAD8 nicht in der Lage ist, ein quadratisches Verschiebungsfeld exakt zu approximieren, da der  $\xi^2 \eta^2$ -Term fehlt.

## Petrov-Galerkin FE-Formulierung [2]

- Approximation der Testfunktion:

$$\mathbf{v}^e \approx \mathbf{v}^{h,e} = \sum_{j=1}^8 \hat{N}_j \mathbf{v}_j^e$$

mit parametrischen Formfunktionen, analog zur klassischen Bubnov-Galerkin FE-Formulierung.

- Approximation der Lösungsfunktion:

$$\mathbf{u}^e \approx \mathbf{u}^{h,e} = \sum_{i=1}^8 M_i^e \mathbf{u}_i^e$$

mit metrischen Formfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{m} &= \mathbf{p}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ \mathbf{m} &= [M_1^e, M_2^e, M_3^e, \dots, M_8^e]^T \\ \mathbf{p}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= [1, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\xi}^2, \bar{\eta}^2, \bar{\xi}\bar{\eta}, \bar{\xi}^2\bar{\eta}, \bar{\xi}\bar{\eta}^2]^T \\ \mathbf{P} &= [\mathbf{p}(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1), \mathbf{p}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2), \dots, \mathbf{p}(\bar{\xi}_8, \bar{\eta}_8)] \\ \Leftrightarrow \mathbf{m} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{p} \end{aligned}$$

Durch die Verwendung von zwei verschiedenen Gruppen von Formfunktionen ( $\hat{N}_j$  und  $M_i^e$ ) ist die Steifigkeitsmatrix im Allgemeinen unsymmetrisch und die Elementformulierung wird als unsymmetrisches 8-Knoten-Element (US-QUAD8) bezeichnet.

## Numerische Untersuchungen

- Scheibe unter reiner Biegung

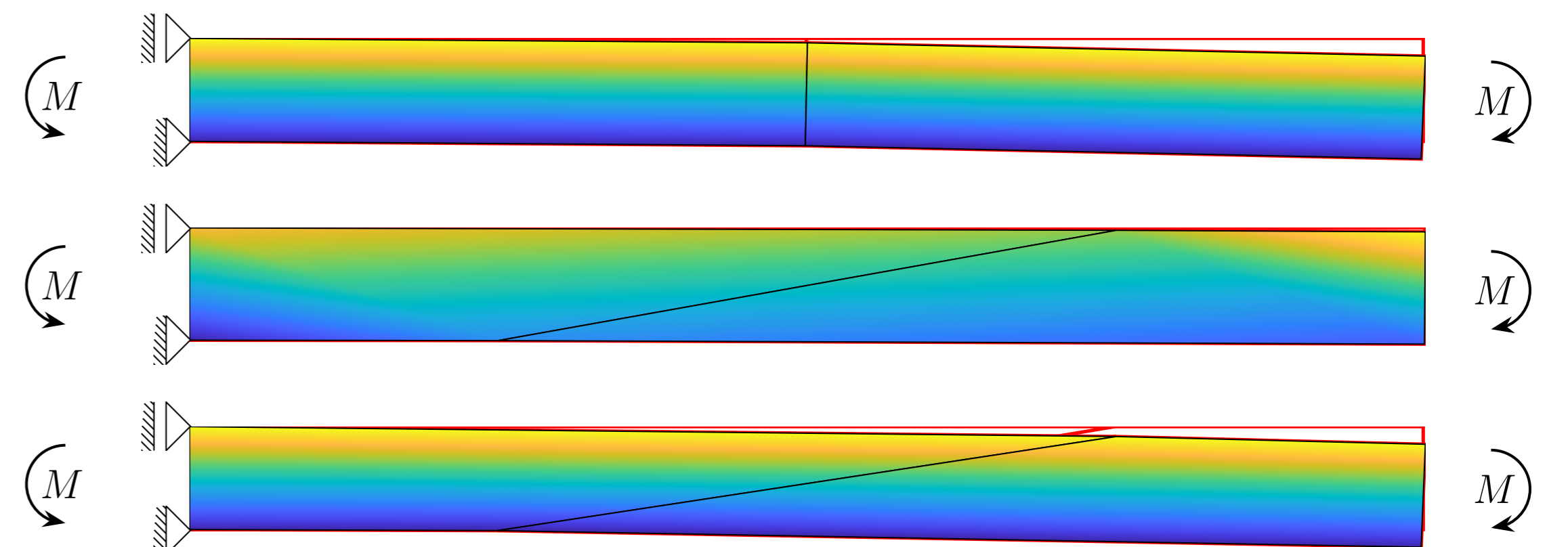


Abbildung 2: Unverzerrtes Netz mit QUAD8 bzw. US-QUAD8 (oben), verzerrtes Netz mit QUAD8 (mitte) und verzerrtes Netz mit US-QUAD8 (unten).

- Cooks-Membran

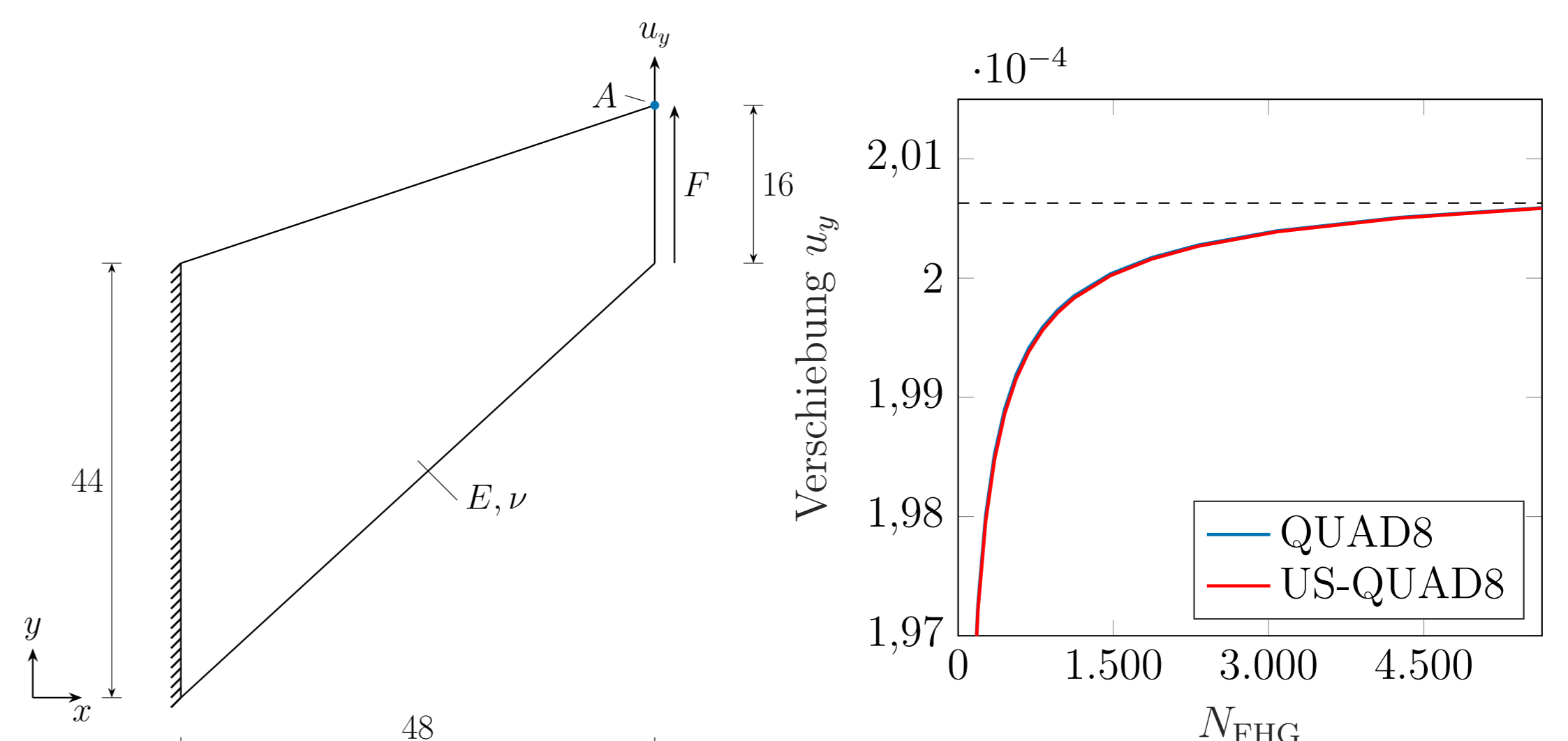


Abbildung 3: Cooks-Membran mit  $E = 1,0 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $F = 80$  (links) und Verschiebung  $u_y$  in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden  $N_{FHG}$  (rechts).

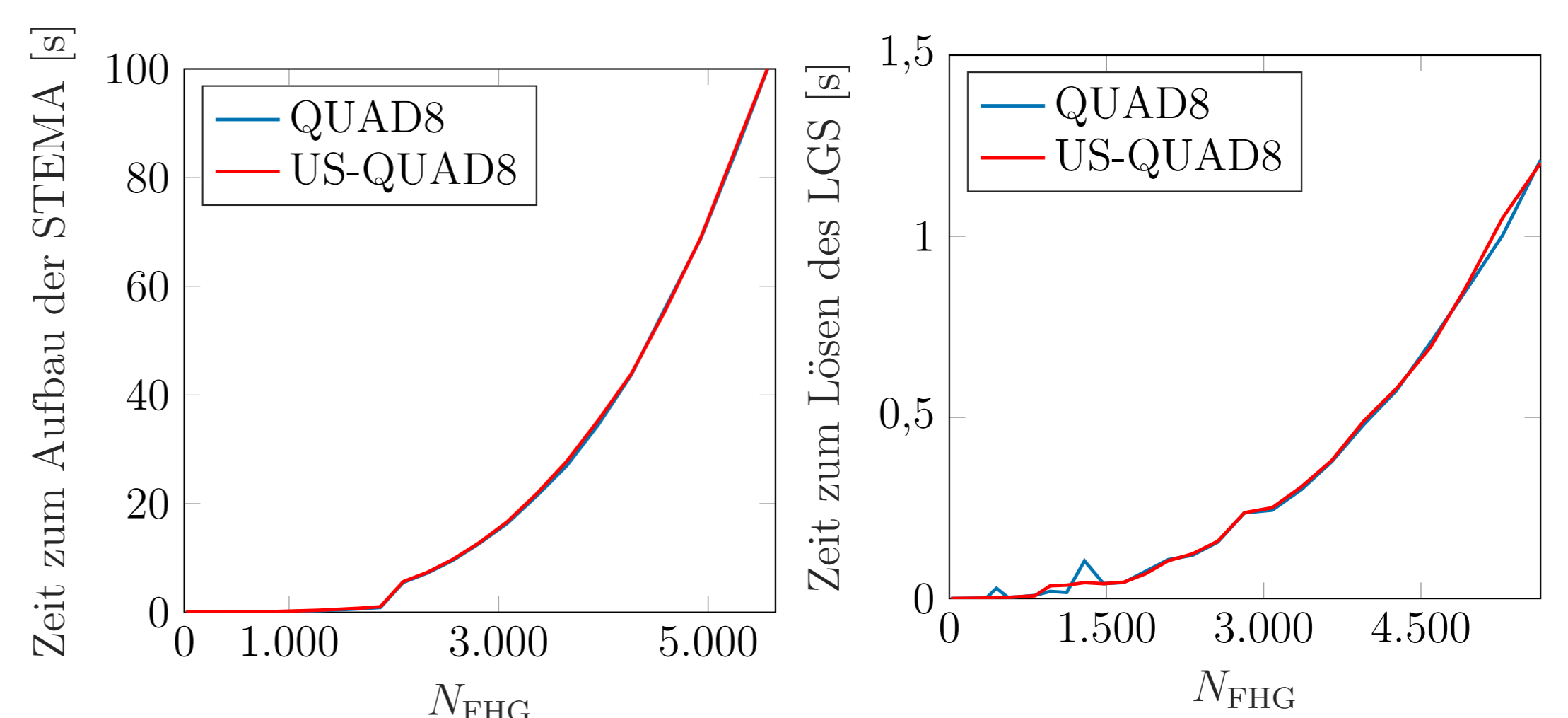


Abbildung 4: Zeit zum Aufbau der STEMA (links) bzw. zum Lösen des LGS (rechts) in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden  $N_{FHG}$ .

## Literatur

- LEE, N.-S. und BATHE, K.-J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(20): 3553–3576, 1993.
- RAJENDRAN, S. und LIEW, K. M. A novel unsymmetric 8-node plane element immune to mesh distortion under a quadratic displacement field. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(11): 1713–1748, 2003.