Modulprüfung

Dynamik

22. August 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

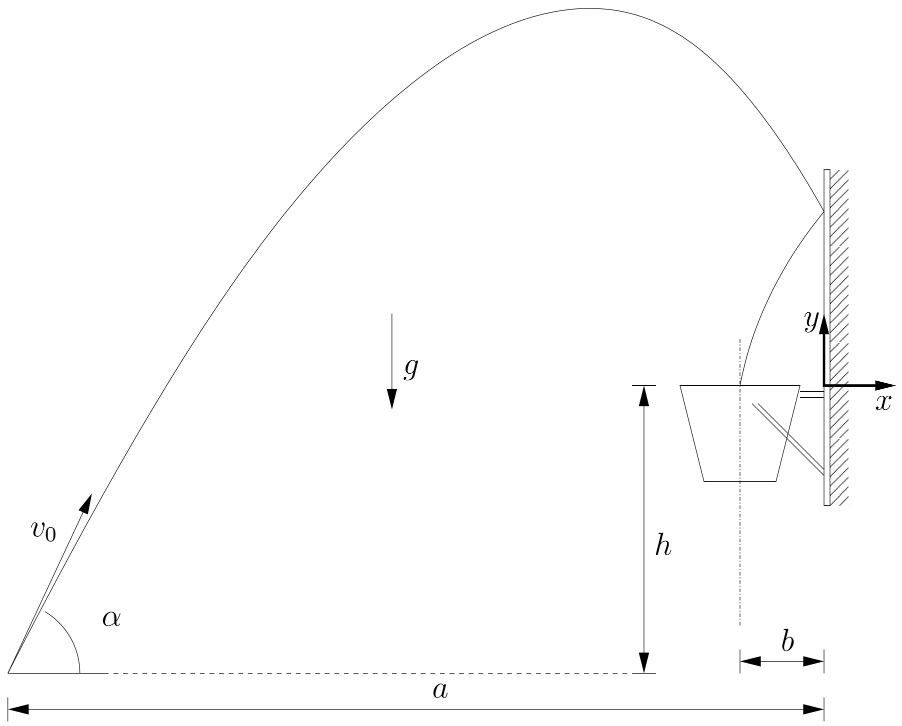
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Freiwurf
Ein Basketballspieler steht auf der Freiwurflinie (Abstand a) und wirft zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ indirekt in den Korb. Das heißt der Ball prallt erst am glatten Brett ab und trifft genau mittig in den Korb. Die Größen a, b, h, v_0, α und g seien bekannt. Reibungseffekte dürfen vernachlässigt und der Ball als Massenpunkt betrachtet werden.

a) Stellen Sie alle Bewegungsgleichungen im gegebenen Koordinatensystem auf!

b) Zu welchem Zeitpunkt t_B prallt der Ball an der Wand auf?

c) Zu welchem Zeitpunkt t_C taucht der Ball in den Korb ein?

d) Wie groß ist die Stoßzahl e zwischen Ball und Brett?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Bewegungsgleichungen

In x-Richtung:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 && \text{für } t < t_\mathrm{B}\\
\dot{x} &= v_0 \cos\alpha && \text{für } t < t_\mathrm{B}\\
x &= v_0 \cos\alpha\, t - a && \text{für } t \leq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 && \text{für } t > t_\mathrm{B}\\
\dot{x} &= v_\mathrm{b} && \text{für } t > t_\mathrm{B}\\
x &= v_\mathrm{b}(t - t_\mathrm{B}) && \text{für } t \geq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

In y-Richtung:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -g && \text{für } t < t_\mathrm{B}\\
\dot{y} &= -g\,t + v_0 \sin\alpha && \text{für } t < t_\mathrm{B}\\
y &= -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t - h && \text{für } t \leq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -g && \text{für } t > t_\mathrm{B}\\
\dot{y} &= -g\,t + \dot{y}(t_\mathrm{B}) && \text{für } t > t_\mathrm{B}\\
y &= -\tfrac{1}{2}\,g\,(t - t_\mathrm{B})^2 + \dot{y}(t_\mathrm{B}) \cdot (t - t_\mathrm{B}) + y(t_\mathrm{B}) && \text{für } t \geq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

Beim Einsetzen zeigt sich direkt, daß der Stoß keinen Einfluß in y-Richtung hat:

$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\, t - h \qquad \text{für alle } t$$

b) Zeitpunkt t_B

$$\begin{aligned}
x(t_\mathrm{B}) = 0 &= v_0 \cos\alpha\, t_\mathrm{B} - a\\
t_\mathrm{B} &= \frac{a}{v_0 \cos\alpha}
\end{aligned}$$

c) Zeitpunkt t_C

$$\begin{aligned}
y(t_\mathrm{C}) = 0 &= -\frac{1}{2}\,g\,t_\mathrm{C}^2 + v_0 \sin\alpha\, t_\mathrm{C} - h\\
t_\mathrm{C} &= \frac{1}{-g}\left(-v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right)
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Aus der Form der Wurfparabel erkennt man, daß der spätere Zeitpunkt der gesuchte sein muß.

$$\begin{aligned}
t_\mathrm{C} &= \frac{1}{-g}\left(-v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right)\\
&= \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right)
\end{aligned}$$

d) <u>Stoßzahl e</u>

$$e \overset{\text{D}}{=} -\frac{v_{\text{b}}^{\text{I}} - v_{\text{b}}^{\text{II}}}{v_{\text{a}}^{\text{I}} - v_{\text{a}}^{\text{II}}}$$

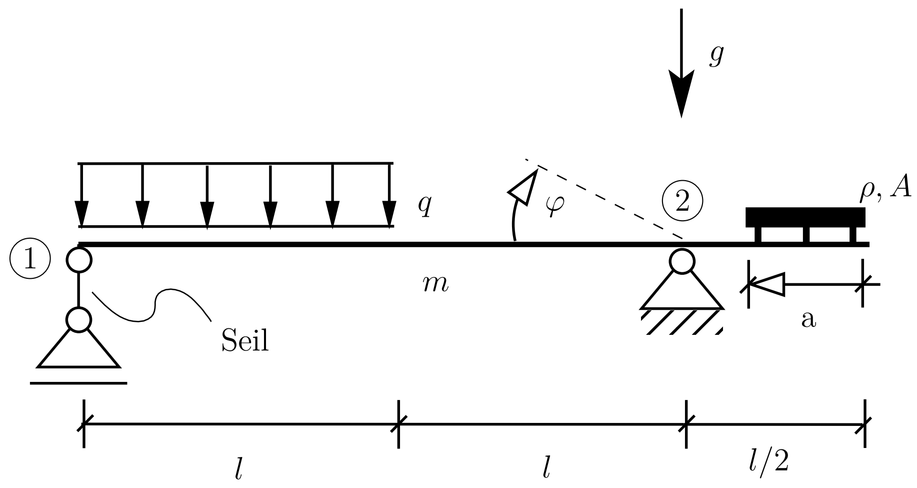
(in Stoßnormalenrichtung) mit $v_{\text{a}}^{\text{I}} = \dot{x}(t < t_{\text{B}})$, $v_{\text{b}}^{\text{I}} = \dot{x}(t > t_{\text{B}})$ und $v_{\text{a}}^{\text{II}} = v_{\text{b}}^{\text{II}} = 0$.

$$e = -\frac{\dot{x}(t > t_{\text{B}})}{\dot{x}(t < t_{\text{B}})} = -\frac{v_{\text{b}}}{v_0 \, \cos\alpha}$$

$$\begin{aligned} x(t_{\text{C}}) = -b &= v_{\text{b}} \, (t_{\text{C}} - t_{\text{B}}) \\ v_{\text{b}} &= \frac{-b}{t_{\text{C}} - t_{\text{B}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= -\frac{-b}{v_0 \, \cos\alpha \, (t_{\text{C}} - t_{\text{B}})} \\ &= \frac{b}{v_0 \, \cos\alpha \left(\frac{1}{g} \left(v_0 \, \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \, \sin^2\alpha - 2\, g\, h} \right) - \frac{a}{v_0 \, \cos\alpha} \right)} \end{aligned}$$

2. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Ein Bahnübergang ist mit der oben abgebildeten Schranke versehen. Diese besteht aus einem Arm (Länge $\frac{5}{2}l$) der homogen verteilten Masse m und einem fest montierten schlanken Zusatzgewicht der Länge a, Querschnittsfläche A und Dichte ρ. Weiterhin soll am Arm eine konstante vertikale Streckenlast q angreifen. Die Schranke wird durch ein Seil im Punkt 1 im Gleichgewicht gehalten.

a) Geben Sie das gesamte Massenträgheitsmoment $\Theta^{(2)}$ der Schranke bzgl. des Punktes 2 an.

b) Welche minimale Länge a (gemessen vom Ende des Schrankenarms aus) muss das Zusatzgewicht haben, damit sich die Schranke nach Lösen des Seils selbständig öffnet?

c) Nun wird das Seil gelöst. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für eine allgemeine ausgelenkte Lage auf, wenn $a = l/2$ gewählt wird.

Gegeben: l, m, g, $\rho A = \dfrac{48}{3}\dfrac{m}{l}$, $q = \dfrac{mg}{2l}$, $a \leq \dfrac{l}{2}$.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Massenträgheitsmoment der Schranke bzgl. Punkt 2:

$$\Theta^{(2)} = \Theta^{(2)}_{\text{Arm}} + \Theta^{(2)}_{\text{Zusatzgew.}} =$$

$$= \frac{m\,(\frac{5}{2}\,l)^2}{12} + m\,(\frac{5}{4}\,l - \frac{l}{2})^2 + \rho\,A\,a\frac{a^2}{12} + \rho\,A\,a\,(\frac{l}{2} - a + \frac{a}{2})^2$$

$$= \frac{25}{48}\,m\,l^2 + \frac{27}{48}\,m\,l^2 + \frac{48}{3}\,\frac{m}{l}\,(\frac{4\,a^3}{48} + \frac{12}{48}\,a^3 - \frac{24}{48}\,l\,a^2 + \frac{12}{48}\,l^2\,a)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\Theta^{(2)} = \frac{13}{12}\,m\,l^2 + \frac{16}{3}\frac{m}{l}\,a^3 - 8\,m\,a^2 + 4\,m\,l\,a}}$$

b) minimale Länge a des Zusatzgewichts, damit Schranke sich selbständig öffnet kann:

$$\Theta^{(2)}\ddot{\varphi} = \sum M^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} > 0 \quad \text{nur wenn} \quad \sum M^{(2)} > 0$$

$$\Rightarrow \sum M^{(2)} = g\,\rho\,A\,a\,(\frac{a}{2} + \frac{l}{2} - a) - m\,g\,(\frac{5}{4}l - \frac{1}{2}l) - q\,l\,\frac{3}{2}\,l \;>\; 0$$

$$-\rho\,g\,A\frac{a^2}{2} + \rho\,g\,A\,\frac{l}{2}\,a - \frac{3}{2}\,m\,g\,l \;>\; 0$$

$$a^2 - l\,a + \frac{3}{16}\,l^2 \;<\; 0$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - \frac{3}{4}\,l^2}}{2} \Longrightarrow \underline{\underline{a > \frac{l}{4}}}$$

c) Bewegungsgleichung des Systems, wenn $a = l/2$:

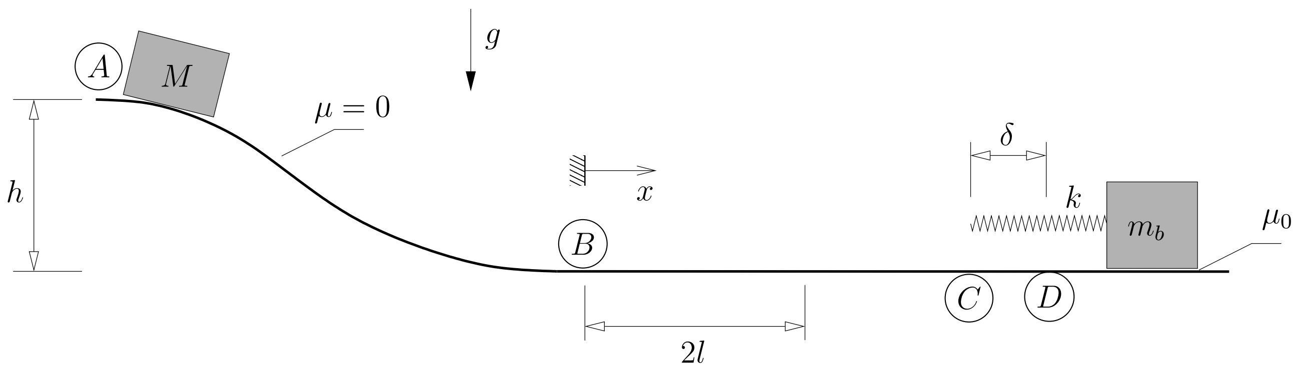
$$\Theta^{(2)}\ddot{\varphi} = g\,\rho\,A\,\frac{l}{2}\,(\frac{l}{2} - \frac{l}{4})\cos\varphi - m\,g\,\frac{3}{4}l\,\cos\varphi - \frac{3}{2}\,q\,l^2\,\cos\varphi$$

$$(\frac{13}{12}\,m\,l^2 + \frac{2}{3}\,m\,l^2 - 2\,m\,l^2 + 2\,m\,l^2)\ddot{\varphi} = \frac{48}{3}\,\frac{mg}{l}\,\frac{l^2}{8}\cos\varphi - m\,g\,\frac{3}{4}l\,\cos\varphi - \frac{3}{4}\,m\,g\,l\,\cos\varphi$$

$$\frac{7}{4}\,m\,l^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\,m\,g\,l\,\cos\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi} - \frac{2}{7}\,\frac{g}{l}\,cos\varphi = 0}}$$

3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Zum Rangieren von Eisenbahnwagen wird ein Ablaufberg eingesetzt. Ein Wagen der Masse M hat in Punkt A die Anfangsgeschwindigkeit v_A. Er fährt den Berg der Höhe h hinunter und wird dann auf einer Strecke $2l$ (gemessen ab Punkt B) mit einer Kraft

$$\boldsymbol{F}(x) = -\frac{3\ Mg}{64\ h^2}\ x^2\ \boldsymbol{e}_x, \quad 0 \leq x \leq 2l$$

abgebremst. In Punkt C fährt der Wagen auf die abgebildete Bremsvorrichtung. Diese besteht aus einer Feder und einem Bremsklotz, der mit μ_0 am Untergrund haftet.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Anfangsgeschwindigkeit v_A, sodass der Wagen in Punkt C die Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{gh}$ hat.

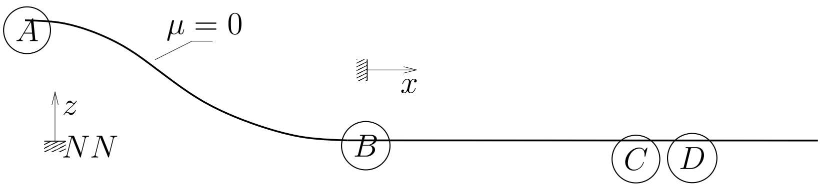
b) Welche Länge δ muss der Federweg mindestens haben, damit der Bremsklotz der Masse m_b nicht gleitet? Wie groß ist für diesen Fall die Federsteifigkeit k? Stellen Sie zuerst das Gleichgewicht für den Bremsklotz auf und setzen Sie darin die Bedingung ein, dass die kinetische Energie vollständig in die Verformung der Feder übergeht.

Hinweis: Der als Massenpunkt anzusehende Wagen bewegt sich zwischen A und D ohne Reibung.

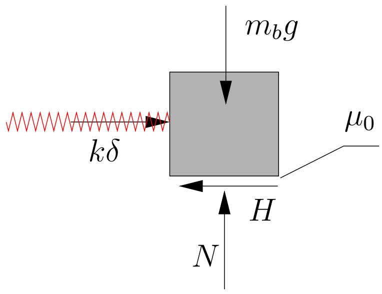
Gegeben: h, $l = 2h$, M, $m_b = 2M$, v_C, g, μ_0

Musterlösung - Aufgabe 3

Wahl des Nullniveaus:



Freischnitt der Bremsvorrichtung:



a) Bestimmung der Geschwindigkeit in Punkt A:

Energie in Punkt C:

$$T_C = \frac{1}{2}Mv_C^2 = \frac{1}{2}Mgh, \qquad V_C = 0$$

Arbeit der Nichtpotentialkraft:

$$W|_0^{2l} = \int_0^{2l} -\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2}x^2\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^{4h} = -Mgh$$

Energie in Punkt A:

$$T_A = \frac{1}{2}Mv_A^2, \qquad V_A = Mgh$$

Arbeitssatz:

$$T_A + V_A + W|_0^{2l} = T_C + V_C$$

$$\Leftrightarrow \qquad T_A = T_C + V_C - V_A - W|_0^{2l}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2}{M}\Big(T_C + V_C - V_A - W|_0^{2l}\Big)} = \sqrt{\frac{2}{M}\Big(\frac{1}{2} + 0 - 1 + 1\Big)Mgh} = \underline{\sqrt{gh}}$$

b) Gleichgewicht am Bremsklotz:

$$k\delta \leq H = \mu_0 m_b g = \mu_0 2Mg$$

Energiebilanz (kin. Energie geht komplett in Federenergie über):

$$T_C = V_{\text{Feder}} \quad \Leftrightarrow \quad T_C = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad \Leftrightarrow \quad k\delta^2 = Mgh$$

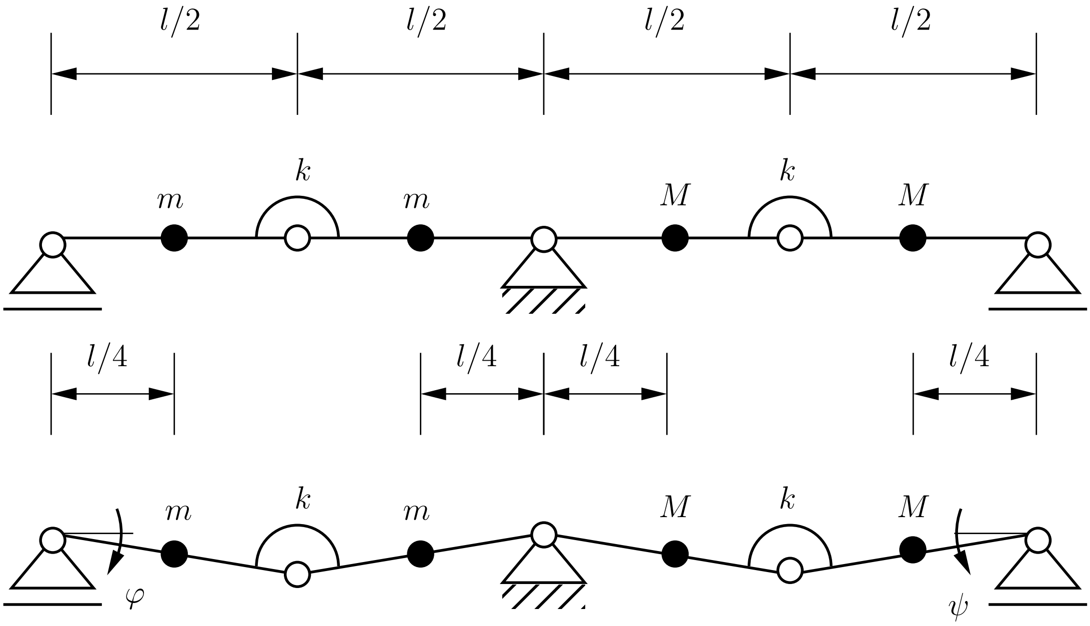
Federweg:

$$\underline{\delta \geq \frac{v_c^2}{2g\mu_0} = \frac{h}{2\mu_0}}$$

Federsteifigkeit:

$$\underline{k = 4\frac{Mg\mu_0^2}{h}}$$

4. Aufgabe: (ca. 36 % der Gesamtpunkte)



Das Schwingverhalten eines Zweifeldträgers der Länge $2l$ soll untersucht werden. Dazu wird die Gesamtmasse des Trägers in Einzelmassen der Masse m bzw. M konzentriert; ebensdo wird die Steifigkeit durch drei Drehfedern der Steifigkeit k modelliert. Der Träger selbst wird dann als starr und masselos angenommen. Die Drehfedern sind entspannt wenn der Träger in horizontaler liegt. Man bestimmt die Vernachlässigung des Gewichtspotentials:

a) die kinetische und potentielle Energie des Systems.

b) die Bewegungsgleichung des Systems mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichung.

c) die linearisierten Bewegungsgleichungen desSystems unter der Annahme kleiner Auslenkungen.

Rechnen Sie mit folgender Form der Bewegungsgleichung weiter:

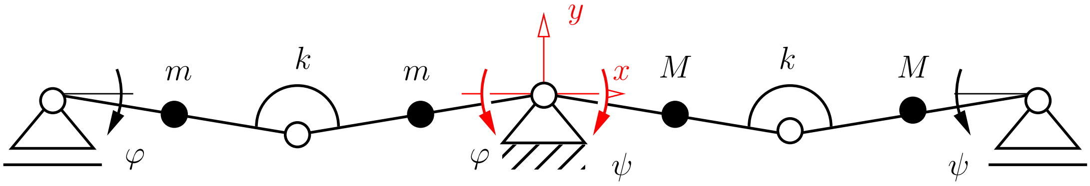
$$\frac{l^2}{8}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems und die zugehörigen Amplitudenverhältnisse für $M = m$

e) Skizzieren Sie die Eigenformen.

Gegeben: M, m, k, l, g

Musterlösung - Aufgabe 4



- Ortsvektoren

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l \cos\psi \\ -\frac{1}{4} l \sin\psi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l \cos\psi + \frac{1}{4} l \cos\psi \\ -\frac{1}{4} l \sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} l \cos\psi \\ -\frac{1}{4} l \sin\psi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r_3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} l \cos\varphi \\ -\frac{1}{4} l \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r_4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l \cos\varphi - \frac{1}{4} l \cos\varphi \\ -\frac{1}{4} l \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} l \cos\varphi \\ -\frac{1}{4} l \sin\varphi \end{bmatrix}$$

- Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} l \sin\psi\dot{\psi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\psi\dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l \sin\psi\dot{\psi} - \frac{1}{4} l \sin\psi\dot{\psi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\psi\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} l \sin\psi\dot{\psi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\psi\dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{3}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l \sin\varphi\dot{\varphi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{4}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l \sin\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{4} l \sin\varphi\dot{\varphi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} l \sin\varphi\dot{\varphi} \\ -\frac{1}{4} l \cos\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

a) Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{16} l^2 \dot{\psi}^2\right) \\
T_2 &= \frac{1}{2} M \left(\frac{9}{16} l^2 \sin^2(\psi)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{16} l^2 \cos^2(\psi)\dot{\psi}^2\right) \\
T_3 &= \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{16} l^2 \dot{\varphi}^2\right) \\
T_4 &= \frac{1}{2} m \left(\frac{9}{16} l^2 \sin^2(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{16} l^2 \cos^2(\varphi)\dot{\varphi}^2\right) \\
T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\
T &= \frac{\dot{\psi}^2 l^2 M}{32} \left(1 + 9\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi)\right) + \frac{\dot{\varphi}^2 l^2 m}{32} \left(1 + 9\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

- Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(\varphi+\psi\right)^2+\frac{1}{2}k\left(2\psi\right)^2+\frac{1}{2}k\left(2\varphi\right)^2 \\ V &= \frac{1}{2}k\left(\varphi+\psi\right)^2+2K\psi^2+2k\varphi^2 \end{aligned}$$

b) Lagrange Funktion und Ableitungen:

$$\begin{aligned} L &= T-V \\ L &= \frac{\dot{\psi}^2l^2M}{32}\Big(1+9\sin^2(\psi)+\cos^2(\psi)\Big) \\ &+ \frac{\dot{\varphi}^2l^2m}{32}\Big(1+9\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\Big) \\ &- \frac{1}{2}k\left(\varphi+\psi\right)^2+2k\psi^2+2k\varphi^2 \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} &= \frac{\dot{\psi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\psi)+\cos^2(\psi)\Big) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) &= \frac{\ddot{\psi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\psi)+\cos^2(\psi)\Big)+\dot{\psi}^2l^2M\sin(\psi)\cos(\psi) \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\dot{\varphi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\Big) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= \frac{\ddot{\varphi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\Big)+\dot{\varphi}^2l^2M\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial\psi} &= -k\left(\psi+\varphi\right)-4k\psi \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= -k\left(\psi+\varphi\right)-4k\varphi \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\psi}=0: \\ 0 &= \frac{\ddot{\psi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\psi)+\cos^2(\psi)\Big)+\dot{\psi}^2l^2M\sin(\psi)\cos(\psi)+5K\psi+K\varphi \qquad (1) \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0: \\ 0 &= \frac{\ddot{\varphi}l^2M}{16}\Big(1+9\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\Big)+\dot{\varphi}^2l^2M\sin(\varphi)\cos(\varphi)+5k\varphi+k\psi \qquad (2) \end{aligned}$$

c) Linearisierung für kleine Auslenkungen:
$|\psi|\ll 1$, $\psi^2\approx 0$, $|\varphi|\ll 1$, $\varphi^2\approx 0$, $\sin(...)\approx(...)$, $\cos(...)\approx 1$, $\sin^2(...)\approx 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{8}l^2M\ddot{\psi}+5k\psi+k\varphi \qquad (3) \\ 0 &= \frac{1}{8}l^2m\ddot{\varphi}+k\psi+5k\varphi \qquad (4) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{1}{8}\begin{bmatrix} Ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + k \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

d) Eigenfrequenzen (mit $m = M$):

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}\omega^2\right) \\
0 &= \begin{vmatrix} 5k - \frac{1}{8}Ml^2\omega^2 & k \\ k & 5k - \frac{1}{8}ml^2\omega^2 \end{vmatrix} \\
0 &= \left(25k^2 - \frac{5k}{8}ml^2\omega^2 - \frac{5k}{8}Ml^2\omega^2 + \frac{1}{64}Mml^4\omega^4\right) - k^2 \\
0 &= \frac{1}{64}Mml^4\omega^4 - \frac{5K}{8}l^2(m+M)\omega^2 + 24k^2 \\
\omega_{1,2}^2 &= \frac{\frac{5k}{8}l^2(M+m) \pm \sqrt{\frac{25k^2}{64}l^2(M+m)^2 - 4\cdot 24k^2 \cdot \frac{1}{64}Mml^4}}{\frac{1}{32}Mml^4} \\
\omega_{1,2}^2 &= \frac{\frac{5}{4}kl^2m \pm \sqrt{\frac{100}{64}k^2l^4m^2 - \frac{96}{64}k^2l^4m^2}}{\frac{1}{32}m^2l^4} \\
\omega_1^2 &= \frac{\frac{10}{8}kl^2m - \frac{2}{8}kl^2m}{\frac{1}{32}m^2l^4} = \frac{kl^2m}{\frac{1}{32}m^2l^4} = 32\frac{k}{ml^2} \\
\omega_1 &= \frac{4\sqrt{2}}{l}\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_2^2 &= \frac{\frac{10}{8}kl^2m + \frac{2}{8}kl^2m}{\frac{1}{32}m^2l^4} = \frac{3}{2}\frac{kl^2m}{\frac{1}{32}m^2l^4} = 48\frac{k}{ml^2} \\
\omega_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

e) Eigenformen:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(5k - \frac{1}{8}ml^2\ 32\frac{k}{ml^2}\right)\psi + k\varphi \quad \rightarrow \quad k(\varphi+\psi) = 0 \qquad \psi = 1, \quad \varphi = -1 \\
0 &= \left(5k - \frac{1}{8}ml^2\ 48\frac{k}{ml^2}\right)\psi + k\varphi \quad \rightarrow \quad k(\varphi-\psi) = 0 \qquad \psi = 1, \quad \varphi = 1
\end{aligned}$$