Modulprüfung

Festigkeitslehre

23. August 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

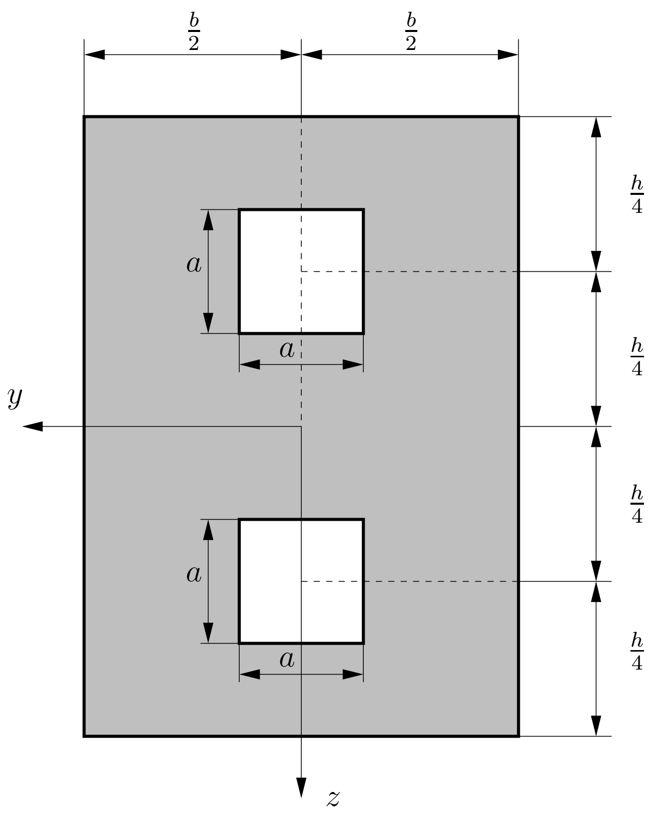
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)

a) Gegeben ist ein Rechteckquerschnitt mit zwei quadratischen Aussparungen.



Gegeben: a, b, h; $a < b < h$.

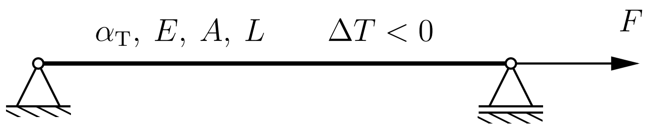
i) Bestimmen Sie die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z des Gesamtprofils.

ii) In welchem Verhältnis stehen für $I_y = I_z$ die Widerstandsmomente W_y und W_z?

iii) Wie groß sind die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z des Gesamtprofils für den Fall, dass die Aussparungen um $\alpha = 30°$ im Gegenuhrzeigersinn um ihren jeweiligen Mittelpunkt gedreht sind?

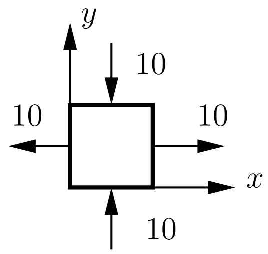
b) Begründen Sie auf Spannungsebene, warum ein dünnwandiger Kessel (Radius r, Wanddicke t mit $t \ll r$ und Länge l) unter Innendruck p meist in Umfangsrichtung (Längsrisse) versagt.

c) Der abgebildete stabförmige Körper der Länge L erfährt die Temperaturdifferenz ΔT.



Wie groß muss die Kraft F gewählt werden, damit der Stab gerade keine Dehnung erfährt? Wie hoch ist dabei die Spannung?

d) An einer ebenen Scheibe ist ein zweiachsiger Spannungszustand $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ gemäß Skizze gegeben



i) Skizzieren Sie den dazugehörigen Mohrschen Spannungskreis.

ii) Geben Sie die Hauptspannungen und den Winkel zwischen x- und 1-Achse an.

iii) Geben Sie die Hauptschubspannungen und den dazugehörigen Winkel an. Skizzieren Sie den Spannungszustand des Schnitts an einem infinitesimalen Flächenelement.

iv) Wie wird der Spannungszustand in iii) bezeichnet?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) i)

$$I_y = \frac{1}{12}\,b\,h^3 - 2\left(\frac{1}{12}\,a^4 + (\frac{h}{4})^2\,a^2\right)$$
$$I_z = \frac{1}{12}\,b^3\,h - 2\left(\frac{1}{12}\,a^4\right)$$

ii)

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{\frac{I_y}{h/2}}{\frac{I_z}{b/2}} \overset{I_y = I_z}{=} \frac{b}{h}$$

iii) Die Trägheitsmomente des Quadrates bzgl. seines Schwerpunktes sind drehungsinvariant und ändern sich folglich nicht. Der Mohrkreis für ein Quadrat ist ein Punkt. $I_y(\varphi = 30°) = I_y$, $I_z(\varphi = 30°) = I_z$

b)

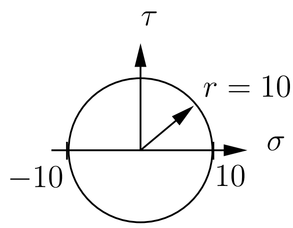
$$\sigma_r = \sigma_x = \frac{1}{2}\,p\,\frac{r}{t}, \quad \sigma_t = \sigma_\varphi = p\,\frac{r}{t} \quad \Rightarrow \sigma_t = 2\,\sigma_r$$

Längsrisse entstehen, da die Tangentialspannung σ_t doppelt so groß ist wie die Radialspannung σ_r.

c)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \sigma = -E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T = \frac{F}{A} \quad \Leftrightarrow F = -\alpha_{\mathrm{T}}\,E\,A\,\Delta T$$
$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F}{A} = -\alpha_{\mathrm{T}}\,E\,\Delta T \text{ Wärmespannung}$$

d) i)

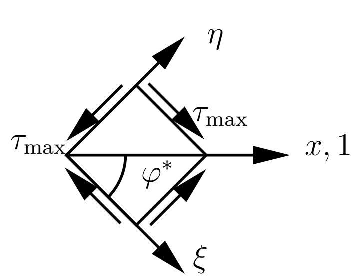


ii)

$$\sigma_x = 10 = \sigma_1, \quad \sigma_y = -10 = \sigma_2, \quad \tau = 0$$
$$\varphi^* = 0$$

iii) siehe i)

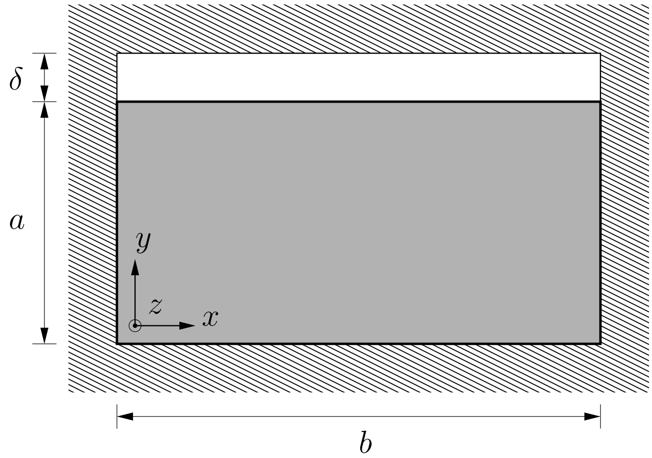
$$\tau_{\max} = r = 10, \quad \varphi^* = -45°$$



iv) Reiner Schub

2. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)

Eine linear-elastische Scheibe (Höhe a, Breite b, E-Modul E, Querkontraktionszahl ν, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) wird wie abgebildet in einen starren Ausschnitt eingesetzt, sodass sie in x-Richtung gerade hinein passt und in y-Richtung ein Spalt δ verbleibt. Es sei angenommen, dass die Scheibe an allen Rändern reibungsfrei gleiten kann und ein ebener Spannungszustand vorliegt.



Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Welche Temperaturerhöhung ΔT_a ist erforderlich, sodass sich der Spalt gerade schließt? Wie groß ist dabei die Spannung in x-Richtung?

b) Wie groß sind die Spannungen für ein gegebenes $\Delta T_b > \Delta T_a$?

Gegeben: a, b, δ, E, ν, α_T.

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = \frac{\delta}{a}, \sigma_y = 0$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T \\
\Rightarrow 0 &= \frac{1}{E}\,\sigma_x + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{a}} \\
\Leftrightarrow \sigma_x &= -E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{a}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T \\
\Rightarrow \frac{\delta}{a} &= -\frac{1}{E}\,\nu\,\sigma_x + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{a}} \quad |\ \text{mit (1)} \\
\Rightarrow \frac{\delta}{a} &= \nu\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{a}} + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{a}} \\
\Leftrightarrow \Delta T_{\mathrm{a}} &= \frac{\delta}{a\,\alpha_{\mathrm{T}}\,(1+\nu)} \quad |\ \text{in (1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_x &= -E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\frac{\delta}{a\,\alpha_{\mathrm{T}}\,(1+\nu)} \\
\Leftrightarrow \sigma_x &= -\frac{E}{1+\nu}\,\frac{\delta}{a}
\end{aligned}$$

b)

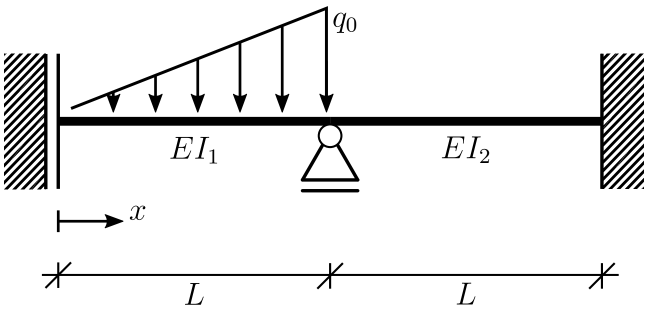
$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = \frac{\delta}{a}, \Delta T_{\mathrm{b}}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T \\
\Rightarrow 0 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}} \\
\Leftrightarrow \sigma_x &= \nu\,\sigma_y - E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\Delta T \quad |\ \text{mit (2)} \\
\Rightarrow \frac{\delta}{a} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu^2\,\sigma_y + E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\nu\,\Delta T_{\mathrm{b}}\right) + \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}} \\
\Leftrightarrow \sigma_y\,(1-\nu^2) &= E\,(\frac{\delta}{a} - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}}\,(1+\nu)) \\
\Leftrightarrow \sigma_y &= E\,\frac{\frac{\delta}{a} - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}}\,(1+\nu)}{1-\nu^2} \quad |\ \text{in (2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_x &= \frac{\nu\,E\,\frac{\delta}{a} - E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}}\,\nu\,(1+\nu) - E\,\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}}\,(1-\nu^2)}{1-\nu^2} \\
\Leftrightarrow \sigma_x &= E\,\frac{\nu\,\frac{\delta}{a} - \alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta T_{\mathrm{b}}\,(1+\nu)}{1-\nu^2}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte, statisch unbestimmte Tragwerk wird durch eine linear ansteigende Streckenlast $q(x) = \frac{q_0}{L}x$ belastet. Der abgebildete Balken weist links des Loslagers die Biegesteifigkeit EI_1 und rechts des Loslagers die Biegesteifigkeit EI_2 auf. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Nennen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit des Tragwerkes.

b) In wie viele Bereiche muss der Träger unterteilt werden, damit die Durchbiegung aus der DGL der Biegelinie bestimmt werden kann.

c) Führen Sie die Integration der DGL der Biegelinie so durch, dass Sie die Durchbiegung in Abhängigkeit der Koordinate x sowie der Integrationskonstanten erhalten.

d) Geben Sie alle erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Integrationskonstanten benötigt werden.

Hinweis: Die Integrationskonstanten sind nicht zu bestimmen.

Gegeben: L, q_0, EI_1, EI_2.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Abzählformel

$$f = 3 \cdot 1 - (3 + 2 + 1 + 0) = -3$$

$\Rightarrow$ Der Balken ist 3-fach statisch unbestimmt

b) Am Loslager bei $x = L$ entstehen diskontinuierliche Verläufe. Folglich sind zwei Bereiche zur korrekten Integration notwendig.

c)
- Bereich I: $0 \leq x < L$

$$\begin{aligned}
EI_1 w_1''''(x) &= \frac{q_0}{L} x & &= q(x) \\
EI_1 w_1'''(x) &= \frac{q_0}{2L} x^2 + c_1 & &= -Q_1(x) \\
EI_1 w_1''(x) &= \frac{q_0}{6L} x^3 + c_1 x + c_2 & &= -M_1(x) \\
EI_1 w_1'(x) &= \frac{q_0}{24L} x^4 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \\
EI_1 w_1(x) &= \frac{q_0}{120L} x^5 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4
\end{aligned}$$

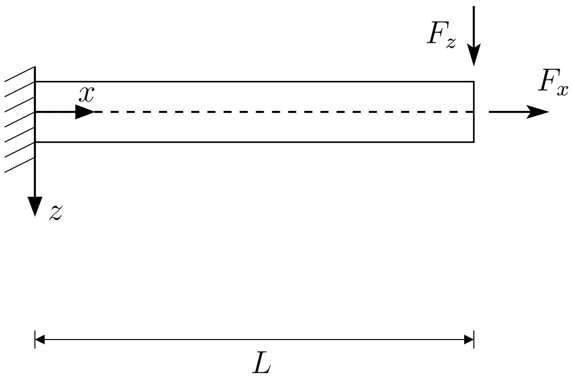
- Bereich II: $L < x \leq 2L$

$$\begin{aligned}
EI_2 w_2''''(x) &= 0 \\
EI_2 w_2'''(x) &= c_5 & &= -Q_2(x) \\
EI_2 w_2''(x) &= c_5 x + c_6 & &= -M_2(x) \\
EI_2 w_2'(x) &= \frac{1}{2} c_5 x^2 + c_6 x + c_7 \\
EI_2 w_2(x) &= \frac{1}{6} c_5 x^3 + \frac{1}{2} c_6 x^2 + c_7 x + c_8
\end{aligned}$$

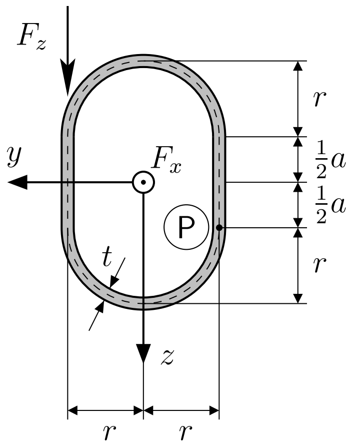
d) Das System ist statisch unbestimmt. Es sind folglich sowohl geometrisch als auch statische Bedingungen notwendig. 8 Integrationskonstanten und 8 Rand- und Übergangsbedingungen werden benötigt:

$$\begin{aligned}
EI_1 w_1'''(x = 0) &= 0 & &\text{oder } -EI_1 w_1'''(x = L) = -1/2 q_0 L \\
w_1'(x = 0) &= 0 \\
w_1(x = L) &= 0 \\
w_2(x = L) &= 0 \\
w_1'(x = L) &= w_2'(x = L) \\
EI_1 w_1''(x = L) &= EI_2 w_2''(x = L) \\
w_2(x = 2L) &= 0 \\
w_2'(x = 2L) &= 0
\end{aligned}$$

4. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Ansicht



Querschnitt

Gegeben ist ein Kragarm mit dem abgebildeten geschlossenen Hohlquerschnitt (Querschnittsfläche A, Flächenträgheitsmoment I_y). Der Querschnitt besteht aus zwei Halbkreisen, welche durch zwei vertikale Stege miteinander verbunden sind. Der Querschnitt kann als *dünnwandig* betrachtet werden ($t \ll r$ bzw. $t \ll a$). An der Stelle $x = L$ ist der Kragarm durch zwei Einzelkräfte F_x und F_z belastet.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben unter Beachtung der gegebenen Größen:

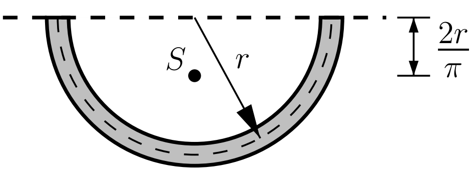
a) Bestimmen Sie alle auftretenden Schnittgrößen an der Stelle $x = 0$.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Lage der Spannungsnulllinie an der Stelle $x = 0$.

c) Bestimmen Sie die auftretenden Spannungen im Punkt P an der Stelle $x = 0$. Stellen Sie den Spannungszustand in diesem Punkt anschließend an einem geeigneten infinitesimalen Flächenelement dar.

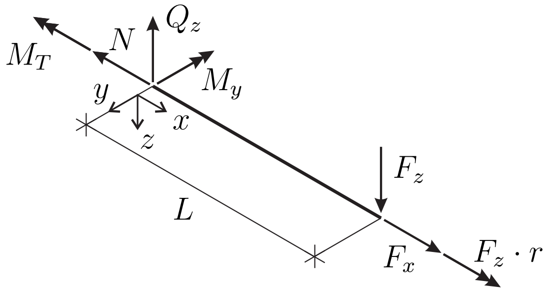
Gegeben: $L = 300\,\text{cm}$, $r = 2{,}5\,\text{cm}$, $a = 3\,\text{cm}$, $t = 0{,}2\,\text{cm}$, $A = 4{,}34\,\text{cm}^2$, $I_y = 61{,}97\,\text{cm}^4$,
$F_x = 10\,\text{kN}$, $F_z = 1\,\text{kN}$.

Hinweis:



Musterlösung - Aufgabe 4

a) Schnittgrößen bei $x = 0$:

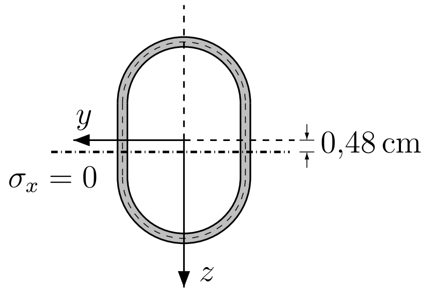


$$N(x = 0) = F_x = 10\,\mathrm{kN}$$
$$M_y(x = 0) = -F_z \cdot L = -300\,\mathrm{kN\,cm}$$
$$Q_z(x = 0) = F_z = 1\,\mathrm{kN}$$
$$M_T(x = 0) = F_z \cdot r = 2{,}5\,\mathrm{kN\,cm}$$

b) Spannungsnulllinie:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{10\,\mathrm{kN}}{4{,}34\,\mathrm{cm}^2} - \frac{300\,\mathrm{kN\,cm}}{61{,}97\,\mathrm{cm}^4} z \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow z \approx 0{,}48\,\mathrm{cm}$$



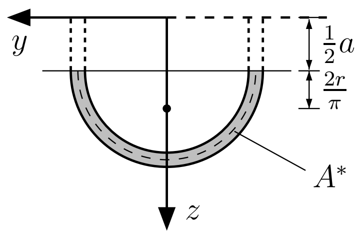
c) Spannungen im Punkt P:

- Normalspannung

$$\sigma_x^{\mathsf{P}} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{10\,\mathrm{kN}}{4{,}34\,\mathrm{cm}^2} - \frac{300\,\mathrm{kN\,cm}}{61{,}97\,\mathrm{cm}^4} \cdot 1{,}5\,\mathrm{cm} \approx -4{,}957\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$$

- Schubspannung
  - infolge Querkraft

$$A^* = \frac{1}{2}\pi\left(\left(r + \frac{t}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{t}{2}\right)^2\right) = \pi r t$$
$$S_y^{\mathsf{P}} = A^* \cdot z^* = \pi r t \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{2r}{\pi}\right) \approx 4{,}856\,\mathrm{cm}^3$$
$$b(z) = 2t = 0{,}4\,\mathrm{cm}$$



$$\Rightarrow \tau_Q^{\mathsf{P}} = \frac{Q_z \cdot S_y^{\mathsf{P}}}{I_y \cdot b(z)} = \frac{1\,\mathrm{kN} \cdot 4{,}856\,\mathrm{cm}^3}{61{,}97\,\mathrm{cm}^4 \cdot 0{,}4\,\mathrm{cm}} \approx 0{,}196\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} \downarrow$$

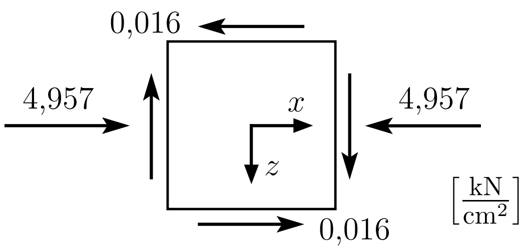
  - infolge Torsion

$$A_m = \pi r^2 + 2ar \approx 34{,}63\,\mathrm{cm}^2$$
$$\Rightarrow \tau_T^{\mathsf{P}} = \frac{M_T}{2A_m \cdot t} = \frac{2{,}5\,\mathrm{kN\,cm}}{2 \cdot 34{,}63\,\mathrm{cm}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{cm}} \approx 0{,}180\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} \uparrow$$

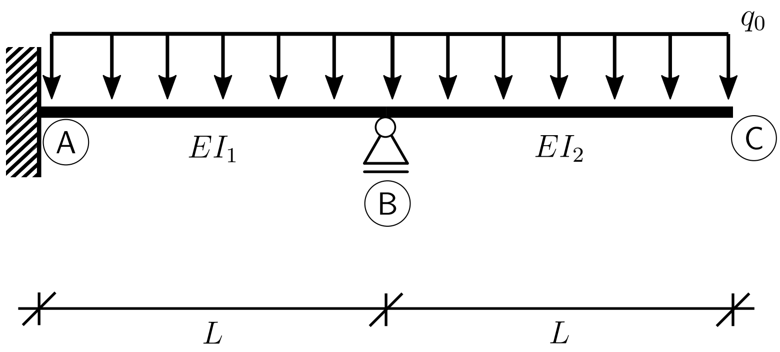
  - Superposition

$$\tau_{ges}^{\mathsf{P}} = \tau_Q^{\mathsf{P}} - \tau_T^{\mathsf{P}} = 0{,}016\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2} \downarrow$$

- Darstellung



5. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



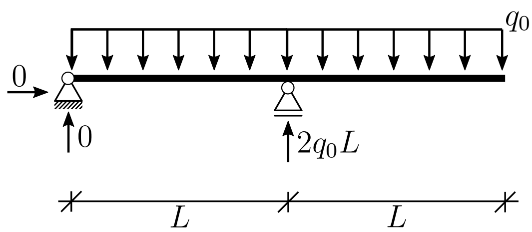
Der dargestellte, einfach statisch unbestimmte Zweifeldträger wird durch eine konstante Streckenlast belastet. Im ersten Bereich weist er die Biegesteifigkeit EI_1 und im zweiten Bereich EI_2 auf. Einflüsse aus Querkraftschub sollen im gesamten Träger vernachlässigt werden. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben mit Hilfe des **Prinzips der virtuellen Kräfte**:

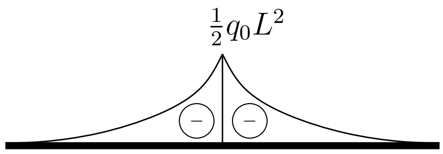
a) Bestimmen Sie das Einspannmoment am Punkt A.

b) Skizzieren Sie den Biegemomentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten.

c) Bestimmen Sie die Durchbiegung am freien Ende C.

Hinweis: Für den unten dargestellten statisch bestimmten Zweifeldträger sind die Lagerreaktionen und der Biegemomentenverlauf angegeben.



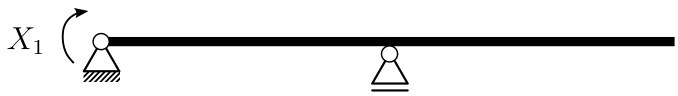


Gegeben: L, q_0, EI_1, EI_2.

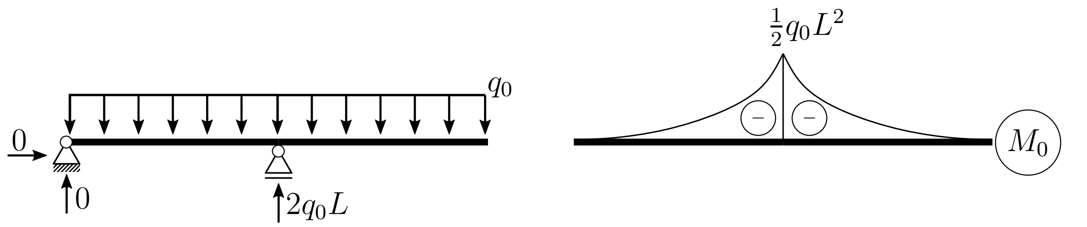
Musterlösung - Aufgabe 5

a) Prinzip der virtuellen Kräfte

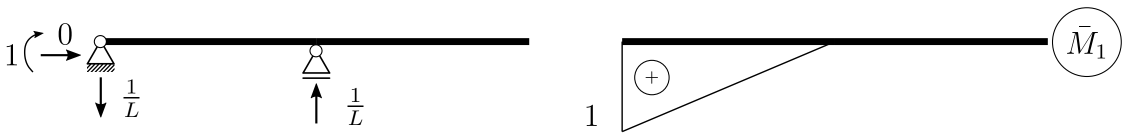
- System ist 1-fach statisch unbestimmt
- Statisch bestimmtes Grundsystem (Einspannmoment wird als unbekannte Kraftgröße X_1 festgelegt)



- "0"-Lastfall (ist angegeben)



- "1"-Lastfall



- Einflusszahlen (spezifische Biegesteifigkeiten beachten)

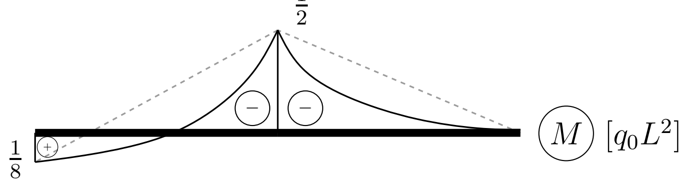
$$\alpha_{11} = \int_0^{2L} \frac{\bar{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L = \frac{L}{3EI_1}$$
$$\alpha_{10} = \int_0^{2L} \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{q_0L^2}{2}\right) \cdot 1 \cdot L = -\frac{q_0L^3}{24EI_1}$$

- Kompatibilität (Verdrehung an der Einspannung ist Null)

$$\alpha_{10} + \alpha_{11}X_1 = 0 \quad \Leftrightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{1}{8}q_0L^2(= M_A)$$

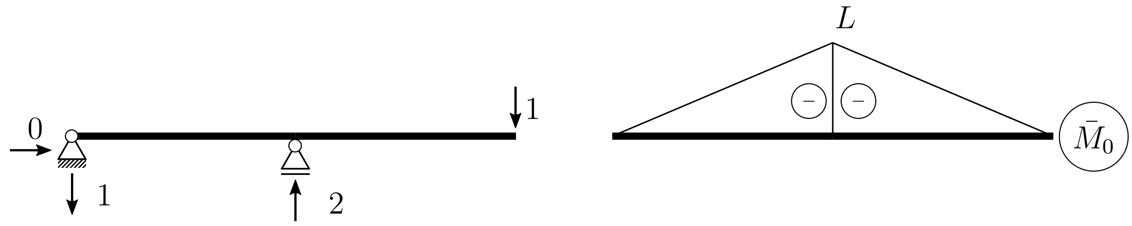
b) Biegemomentenverlauf durch Superposition

$$M = M_0 + \bar{M}_1X_1$$



c) Durchbiegung mithilfe Reduktionssatz

- neuer "1"-Lastfall an Stelle und in Richtung gesuchter Durchbiegung (am statisch bestimmten GS)

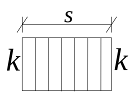
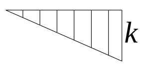
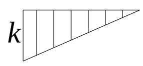
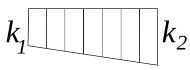
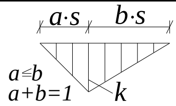
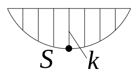
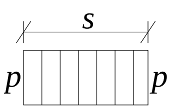
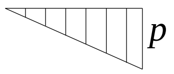
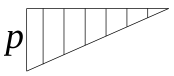
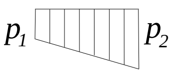
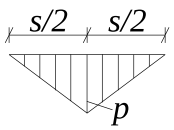
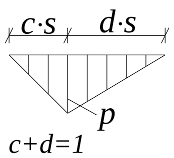
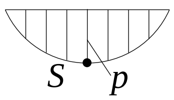
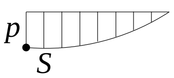
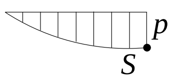
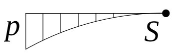
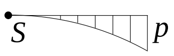


- Koppeln mithilfe Reduktionssatz

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^{2L} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} \mathrm{d}x = \int_0^{L} \frac{\bar{M}_0 M}{EI_1} \mathrm{d}x + \int_L^{2L} \frac{\bar{M}_0 M}{EI_2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L} \frac{\bar{M}_0 M_0}{EI_1} \mathrm{d}x + \int_0^{L} \frac{\bar{M}_0 \cdot X_1 \bar{M}_1}{EI_1} \mathrm{d}x + \int_L^{2L} \frac{\bar{M}_0 M_0}{EI_2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-L) \cdot \left(-\frac{q_0 L^2}{2}\right) \cdot L + \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-L) \cdot \frac{q_0 L^2}{8} \cdot L \\
&\quad + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-L) \cdot \left(-\frac{q_0 L^2}{2}\right) \cdot L \\
&= \frac{5}{48} \frac{q_0 L^4}{EI_1} + \frac{1}{8} \frac{q_0 L^4}{EI_2}
\end{aligned}
$$

Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{dx}$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2)$ $+\frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+$ $p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+$ $k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \triangleq$ Scheitel einer quadratischen Parabel