Modulprüfung

Festigkeitslehre

8. März 2022

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 10% der Gesamtpunktzahl)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie viele unabhängige Normal- und Schubspannungen gibt es in der Festigkeitslehre von dreidimensionalen Körpern?

b) Durch welche Einschränkungen des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustandes wird der ebene Spannungszustand definiert?

c) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den einachsigen Zug. Wie groß sind die maximalen Schubspannungen, wenn beim einachsigen Zug die Normalspannung σ_0 wirkt?

d) Welche unabhängigen Materialparameter beinhaltet das Hookesche Elastizitätsgesetz der dreidimensionalen Festigkeitslehre (ohne Temperatureinfluss)?

e) Was versteht man unter dem Begriff Kernfläche? Skizzieren Sie die Kernfläche eines Kreisquerschnitts.

1. Aufgabe: (ca. 11% der Gesamtpunktzahl)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie ist der Schubmittelpunkt definiert?

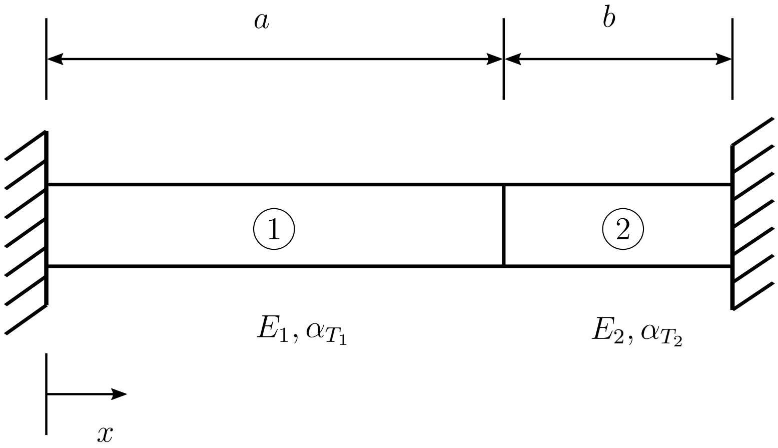
b) Durch welche Einschränkungen des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustandes ergibt sich der ebene Spannungszustand? Wie lauten die unabhängigen Spannungskomponenten beim ebenen Spannungszustand?

c) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den reinen Schubspannungszustand. Wie groß sind die Hauptspannungen, wenn der reine Schubspannungszustand durch die Schubspannung τ_0 charakterisiert wird?

d) Erläutern Sie die Aussage des Vertauschungssatzes von Maxwell unter Verwendung eines Beispiels.

e) Was versteht man unter Kernfläche. Welche Bedeutung hat die Kernfläche im Mauerwerksbau? Skizzieren Sie die Kernfläche eines Kreisquerschnitts.

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

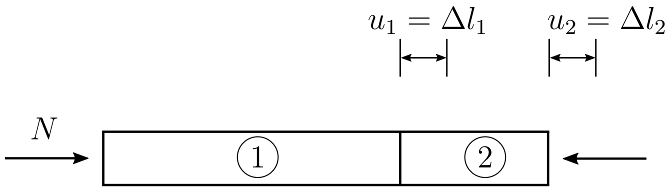


Ein Stab mit konstantem Querschnitt A ist wie skizziert im spannungsfreien Zustand zwischen zwei starren Wänden verbaut. Der Stab bestehe abschnittsweise aus unterschiedlichen Materialien (E_1, α_{T_1} für $0 \leq x < a$, E_2, α_{T_2} für $a \leq x \leq a + b$) und werde längs seiner gesamten Länge um die konstante Temperatur ΔT erwärmt.

Berechnen Sie die Normalkraft im Stab sowie die Verschiebung an der Stelle $x = \frac{a}{2}$.

Gegeben: $E_1,\ E_2,\ A,\ \alpha_{T_1},\ \alpha_{T_2},\ a,\ b,\ \Delta T$

Musterlösung - Aufgabe 2



$$\boxed{\begin{array}{ll} N_1 = E_1 A\left(\dfrac{u_1}{a} - \alpha_{T1}\Delta T\right) & \\ N_2 = E_2 A\left(\dfrac{u_2}{b} - \alpha_{T2}\Delta T\right) & \\ N_1 = N_2 = N & (N' = 0 \rightarrow N = konst) \\ u_1 + u_2 = 0 & \text{(Komp.)} \end{array}}$$

$$\rightarrow E_1 A\left(\frac{u_1}{a} - \alpha_{T1}\Delta T\right) = E_2 A\left(\frac{u_2}{b} - \alpha_{T2}\Delta T\right)$$

$$\rightarrow \frac{E_1}{E_2}\frac{u_1}{a} - \frac{E_1}{E_2}\alpha_{T1}\Delta T = \underbrace{\frac{u_2}{b}}_{= -\frac{u_1}{b}} - \alpha_{T2}\Delta T$$

$$\rightarrow \left(\frac{E_1}{E_2}\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) u_1 = \frac{E_1}{E_2}\alpha_{T1}\Delta T - \alpha_{T2}\Delta T = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{u_1}{a}} \rightarrow \boxed{u_1\left(\frac{a}{2}\right) = \varepsilon_1 \cdot \frac{a}{2}} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{b}{\frac{E_1}{E_2}\frac{b}{a} + 1}\left(\frac{E_1}{E_2}\alpha_{T1} - \alpha_{T2}\right)\Delta T}$$

$$\boxed{N = N_1 = E_1 A\,\frac{b}{a}\,\frac{1}{\frac{E_1}{E_2}\frac{b}{a} + 1}\left(\frac{E_1}{E_2}\alpha_{T1} - \alpha_{T2}\right)\Delta T - E_1 A \alpha_{T1}\Delta T}$$

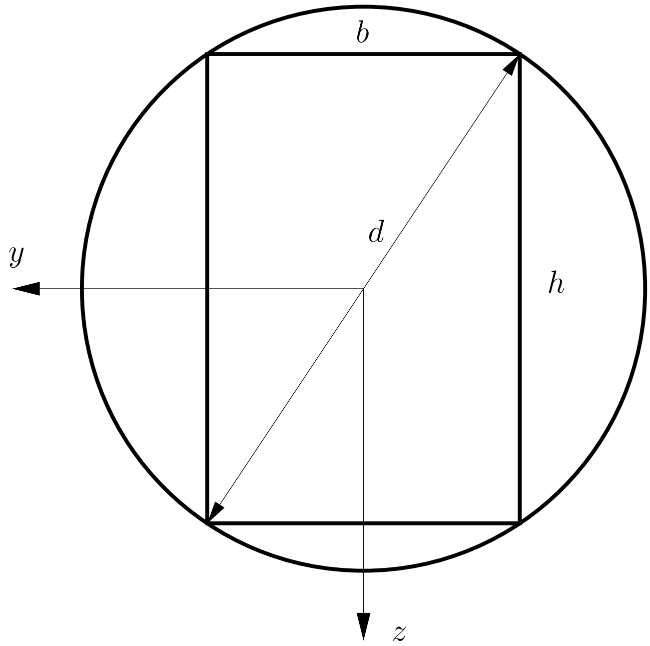
alternativ: Elastizitätsgesetz:

$$\begin{aligned} N_1 &= E_1 A\left(u_1' - \alpha_{T1}\Delta T\right) \\ \rightarrow u_1' &= \frac{N_1}{E_1 A} + \alpha_{T1}\Delta T \\ u_1 &= \frac{N_1}{E_1 A}x + \alpha_{T1}\Delta T x + c_1 \qquad c_1 = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von N_1 liefert:

$$\Rightarrow u_1(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{\frac{E_1}{E_2}\frac{b}{a} + 1}\right)\left(\frac{E_1}{E_2}\alpha_{T1} - \alpha_{T2}\right)\Delta T x$$

3. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)



Aus einem Baumstamm vom Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt derart herausgesägt werden, dass das Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse ein Maximum annimmmt ($I_{y,max}$). Wie groß muss dann h werden und wie groß ist dann $I_{y,max}$?

Gegeben: d.

Musterlösung - Aufgabe 3
Verknüpfung von b, h und d über den Satz des Pythagoras:

$$b^2 + h^2 = d^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Flächenträgheitsmoment für Rechteck:

$$I_y(h) = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{1}{12}\sqrt{d^2 - h^2}\,h^3$$

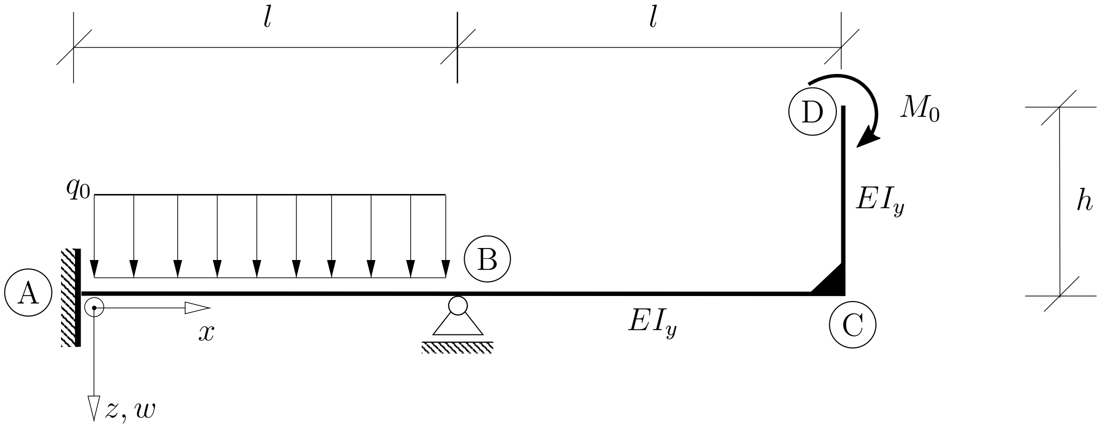
Extremalwert von $I_y(h)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}h} &\overset{!}{=} 0 \\ \frac{1}{12}\left(-\frac{h^4}{\sqrt{d^2-h^2}} + 3\,h^2\sqrt{d^2-h^2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\,h^2\,(d^2 - h^2) - h^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow h^2\,(3\,d^2 - 4\,h^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{h^2}{d^2 - h^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow h_1 = 0, h_{2,3} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,d \end{aligned}$$

d.h. $h_{erf} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,d$ und

$$I_{y,max}(h_{erf}) = \frac{\sqrt{3}}{64}\,d^4 \approx 0.0271\,d^4$$

4. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben dargestellte System unter der angegebenen Belastung.

a) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ des Trägers für den Bereich A−B−C mit Hilfe der Balkendifferentialgleichung.

b) Skizzieren Sie qualitativ die Momenten- und die Biegelinie für den gesamten Träger (A−B−C−D) in die dafür vorgesehenen Vorlagen.

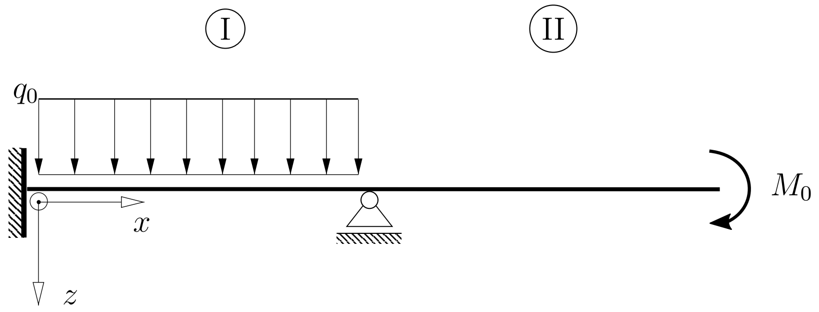
c) Geben Sie für die Abschnitte AB, BC und CD jeweils den Polynomgrad der Biegelinie an.

Gegeben: q_0, $M_0 = q_0 l^2$, l, $h = l/2$, EI_y

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Biegelinie $w(x)$ für den Bereich A−B−C:

statisch unbestimmtes System



Bereich I

$$
\begin{aligned}
EIw_I^{(4)} &= q_0 \\
EIw_I''' &= q_0 x + C_1 \\
EIw_I'' &= \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \\
EIw_I' &= \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw_I &= \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

Bereich II

$$
\begin{aligned}
EIw_{II}^{(4)} &= 0 \\
EIw_{II}''' &= C_5 \\
EIw_{II}'' &= C_5 x + C_6 \\
EIw_{II}' &= \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \\
EIw_{II} &= \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8
\end{aligned}
$$

Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
w_I(x=0) &= 0 && \Rightarrow \quad \underline{C_4 = 0} \\
w_I'(x=0) &= 0 && \Rightarrow \quad \underline{C_3 = 0} \\
EIw_{II}'''(x=2l) &= -Q_z^{II}(x=2l) = 0 && \Rightarrow \quad \underline{C_5 = 0} \\
EIw_{II}''(x=2l) &= -M_y^{II}(x=2l) = -M = M_0 && \Rightarrow \underline{C_6 = M_0}
\end{aligned}
$$

Übergangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
w_I(x=l) &= 0 && (1) \\
-M_y^I(x=l) &= -M_y^{II}(x=l) = EIw_I''(x=l) = EIw_{II}''(x=l) = M_0 && (2) \\
w_I'(x=l) &= w_{II}'(x=l) && (3) \\
w_I(x=l) &= w_{II}(x=l) && (4)
\end{aligned}
$$

mit (1): $\frac{1}{24}q_0l^4 + \frac{1}{6}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 = 0$

$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$

$\Rightarrow EIw_I''(x=l) = \frac{1}{2}q_0l^2 + \frac{2}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$

mit (2): $\frac{2}{3}C_1l + \frac{5}{12}q_0l^2 = q_0l^2$

$\Rightarrow \underline{C_1 = \frac{7}{8}q_0l}$ $\qquad \Rightarrow \underline{C_2 = -\frac{3}{8}q_0l^2}$

mit (3): $\frac{1}{6}q_0l^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}q_0l^3 - \frac{3}{8}q_0l^3 = M_0l + C_7$

$\Rightarrow \underline{C_7 = -\frac{11}{48}q_0l^3}$

mit (4): $w_{II}(x=l) = 0$

$\frac{1}{2}q_0l^4 - \frac{11}{48}q_0l^4 + C_8 = 0$

$\Rightarrow \underline{C_8 = -\frac{13}{48}q_0l^4}$

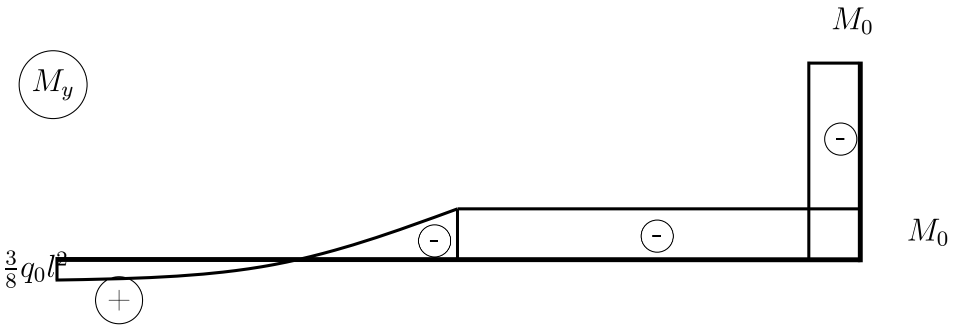
<u>Bereich I</u>

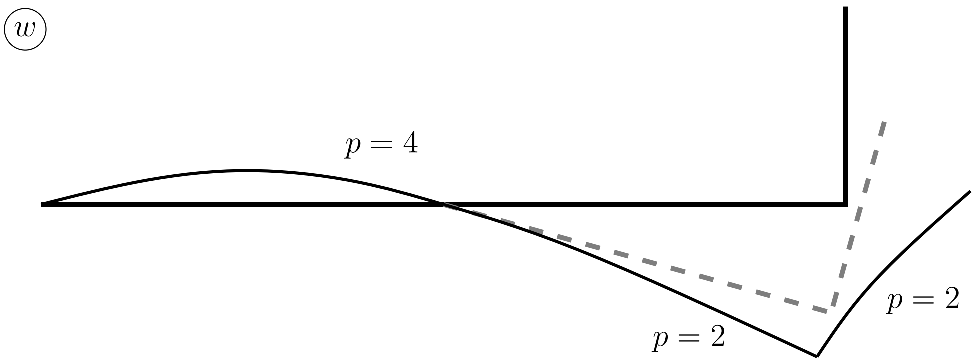
$$\underline{\underline{w_I(x) = \frac{1}{EI}(\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{7}{48}q_0lx^3 - \frac{3}{16}q_0l^2x^2)}}$$

<u>Bereich II</u>

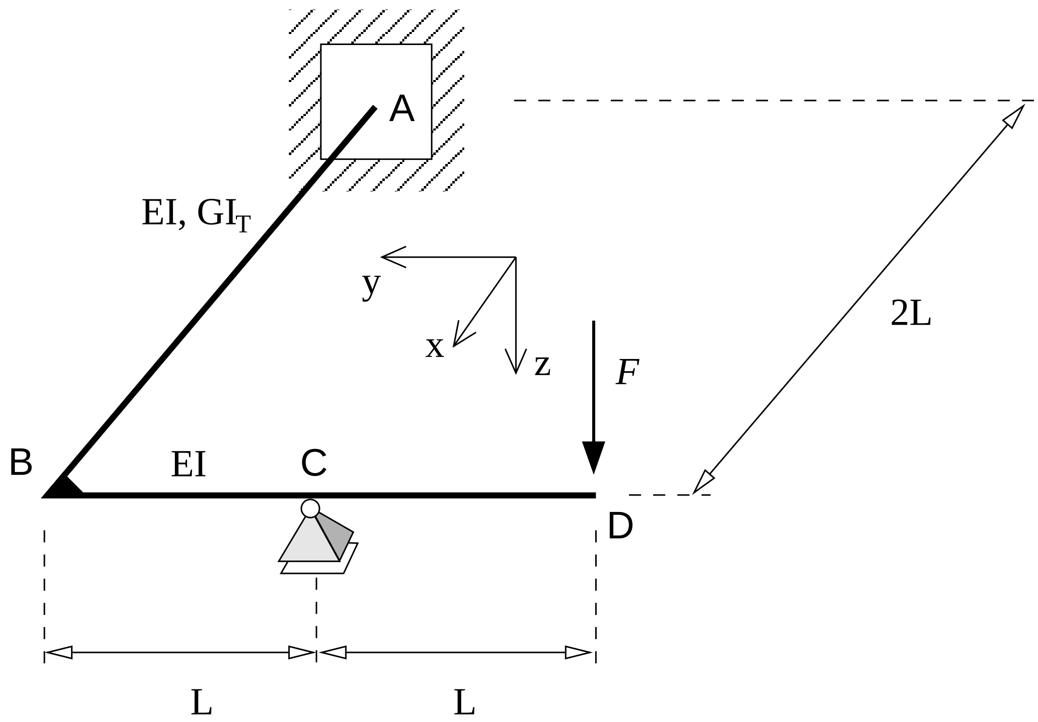
$$\underline{\underline{w_{II}(x) = \frac{1}{EI}(\frac{1}{2}q_0l^2x^2 - \frac{11}{48}q_0l^3x - \frac{13}{48}q_0l^4)}}$$

b) Momenten- und Biegelinie für A−B−C−D





5. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte räumliche Tragwerk wird im Punkt D durch eine Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Auflagerkraft C im Punkt C sowie die Verschiebung des Punktes B in z-Richtung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Gegeben: $L, EI, GI_T = 2\,EI, F$

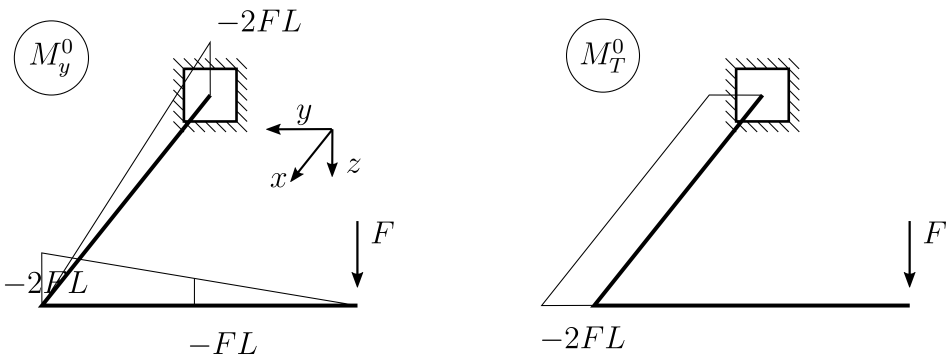
Hinweis: Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

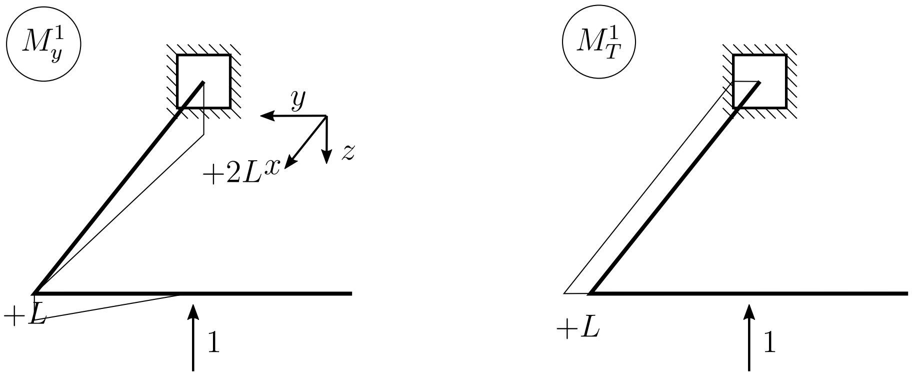
System 1-fach statisch unbestimmt ($a = 7, n = 1 : 6n \neq a$)

$\Rightarrow$ Wahl: $C_v = X_1$

0-System



1-System



Einflusszahlen:

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{L}{6}\left(FL + 4FL\right)L + \frac{1}{3}\left(2FL\left(-2L\right)2L\right)\right] + \frac{1}{GI_T}L\left(-2FL\right)2L$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{6}FL^3 - \frac{8}{3}FL^3 - 2FL^3\right] = -\frac{11}{2}\frac{FL^3}{EI}$$

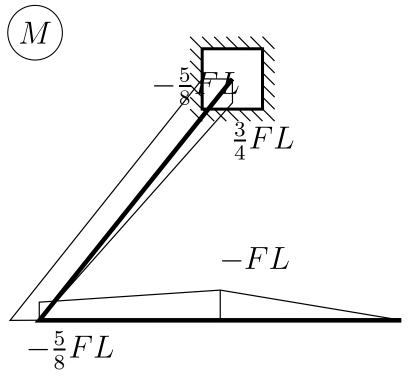
$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(-L\right)^2 L + \frac{1}{3}\left(-2L\right)^2\left(2L\right)\right] + \frac{1}{GI_T}L^2 \cdot 2L$$

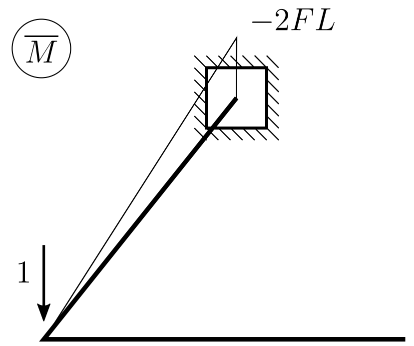
$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}L^3 + \frac{8}{3}L^3 + L^3\right] = 4\frac{L^3}{EI}$$

$$C_v = X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{11}{8}F$$

Superposition:

$$M = M_0 + X_1\, M_1$$



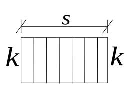
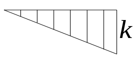
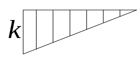
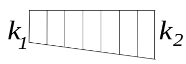
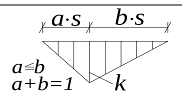
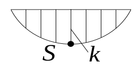
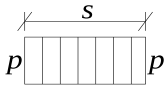
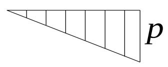
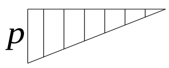
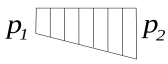
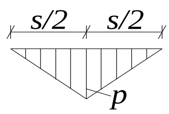
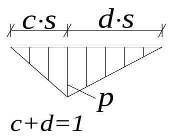
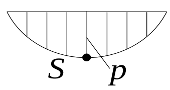
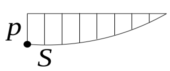
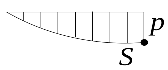
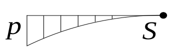
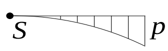


Reduktionssatz:

$$\begin{aligned} f &= \int \frac{\overline{M}M}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\,(-2L)\left(\frac{3}{4}FL\right)\cdot 2L\right] \\ \Rightarrow f &= -\frac{1}{EI}FL^3 \end{aligned}$$

Anhang: Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{dx}$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2)$ $+\frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+$ $p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+$ $k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \triangleq$ Scheitel einer quadratischen Parabel

Modulprüfung
Festigkeitslehre
am 8. März 2022

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....