Prüfung in

Baudynamik

29. Juli 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				
Korrektur				

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_0 \qquad \text{mit} \quad x(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

Dabei sind die Koeffizienten m, d, k und F_0 gegeben und konstant.

b) Warum ist die Steifigkeitsmatrix in der Baudynamik symmetrisch?

c) Wie kann man gekoppelte Bewegungsgleichungen entkoppeln?

d) Was versteht man unter Schwingungstilgung?

e) Was ist Resonanz? Was hat die Vergrößerungsfunktion damit zu tun?

f) Was versteht man unter der Bequemlichkeitshypothese?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Homogene Lösung (in Eigenzeit):

$$x_h(\tau) = \exp(-D\tau)\left(A\cos(\nu\tau) + B\sin(\nu\tau)\right)$$
$$\text{mit } D = \frac{d}{2\sqrt{km}}, \quad \nu = \sqrt{1-D^2}$$

Partikuläre Lösung (vom Typ der rechten Seite) :

$$x_p = \frac{F_0}{k}$$

Gesamtlösung:

$$x(\tau) = x_h(\tau) + x_p = \exp(-D\tau)\left(A\cos(\nu\tau) + B\sin(\nu\tau)\right) + \frac{F_0}{k}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(\tau = 0) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow A = -\frac{F_0}{k}$$

$$\dot{x}(t = 0) \stackrel{!}{=} v_0$$
$$\Leftrightarrow -DA + B\nu = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$
$$\Leftrightarrow B = -\frac{DF_0}{k\nu} + \frac{v_0}{\nu\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

b) Unter der Annahme kleiner Auslenkungen lässt sich die potentielle Energie in quadratischer Form

$$V = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} q_i K_{ij} q_j$$

schreiben, wobei $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix und $\boldsymbol{q}$ die Minimalkoordinaten darstellen. Somit gilt für beliebige Indizes i, j

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Da die partiellen Ableitung vertauschbar sind (Satz von Schwarz), folgt die Symmetrie von $\boldsymbol{K}$.

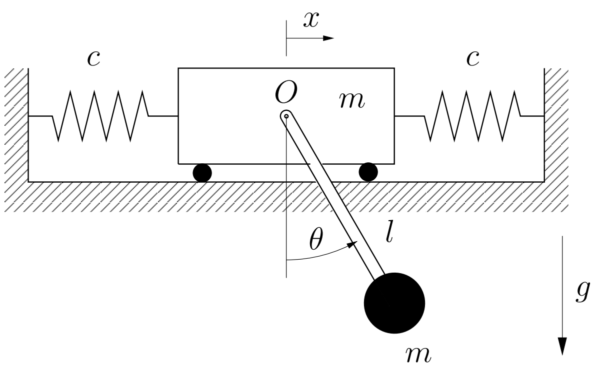
c) Dazu verwendet man die modale Transformation

d) Unter Schwingungstilgung versteht man die Erweiterung eines dynamischen Systems um weitere Feder-Masse Elemente, um das Resonanzproblem zu vermeiden.

e) Resonanz tritt dann auf, wenn die Erregerfrequenz Ω mit einer Eigenfrequenz des Systems ω_i zusammenfällt. Die Vergrößerungsfunktion beschreibt dein Einfluss der äußeren Erregung auf die Amplitude der Schwingung. Bei Resonanz treten maximalen Amplituden auf.

f) Im Kontext der sogenannten Rayleigh-Dämpfung versteht man unter der Bequemlichkeitshypothese, dass man die Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{D}$ aus einer Linearkombination von Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ und Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ bestimmen kann.

Aufgabe 2 (ca. 60% der Gesamtpunkte)



Ein Körper mit der Masse m bewegt sich ohne Reibung entlang einer horizontalen Fläche. Er ist über zwei Federn mit identischen Federsteifigkeiten c an starre Wände angeschlossen. Ein Pendel mit der gleichen Masse m und der Länge l ist im Punkt O drehbar befestigt. Das Pendel ist als Massenpunkt zu betrachten, der Pendelstab ist masselos.

Gegeben: $m,\ g, l,\ c,\ mg = \dfrac{c\,l}{2}, x_0$

Berechnen Sie unter Verwendung der generalisierten Koordinaten x und θ:

a) die linearisierten Bewegungsgleichungen des System, indem Sie von den Lagrange Gleichungen 2. Art ausgehen.

b) die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenfrequenzen des Systems einschließlich zweier Abschätzungen mittels Rayleigh-Quotienten,

c) die Amplituden der stationären Schwingungsantwort des Systems, wenn eine Erregerkraft der Form

$$F = F_0 \cos(\Omega t)$$

auf den Körper in x-Richtung wirkt,

d) die Lösung der Bewegungsgleichungen ohne Erregung mit Hilfe der modalen Transformation und den folgenden Anfangswerten:

$\dot{x}(t=0) = 0, \quad \theta(t=0) = 0, \quad \dot{\theta}(t=0) = 0$ und $x(t=0) = x_0$.

Hinweis:

Ab Aufgabenteil b) kann davon ausgegangen werden, dass freie Schwingungen des Systems durch Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

beschrieben werden. Dabei werden die kinematischen Größen im Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Die Massenmatrix kann im Weiteren als

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}$$

angenommen werden, analog wird die Steifigkeitsmatrix definiert als

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}.$$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Potentielle Energie:

$$V = -m\,g\,l\,\cos(\theta) + 2\left[\frac{1}{2}\,c\,x^2\right]$$

Kinetische Energie:

Ortsvektoren der Schwerpunkte:

Wagen:	$\boldsymbol{x}_1 = x\,\boldsymbol{e}_x$
Pendel:	$\boldsymbol{x}_2 = [x + l\,\sin(\theta)]\,\boldsymbol{e}_x - [l\,\cos(\theta)]\,\boldsymbol{e}_y$

Aus den Ortsvektoren folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x \\
|\dot{\boldsymbol{x}}_1|^2 &= \dot{x}^2 \\
\dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \left[\dot{x} + l\,\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right]\,\boldsymbol{e}_x + \left[l\,\sin(\theta)\,\dot{\theta}\right]\,\boldsymbol{e}_y \\
|\dot{\boldsymbol{x}}_2|^2 &= \dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,l\,cos(\theta) + l^2\,\dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

$$T = m\,\dot{x}^2 + m\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,l\,\cos\theta + \frac{1}{2}\,m\,l^2\,\dot{\theta}^2$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - V$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\,m\,\dot{x} + \,m\,\dot{\theta}\,l\,\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 2\,m\,\ddot{x} + \,m\,l\,\left[\ddot{\theta}\,\cos\theta - \,\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\,2\,c\,x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$2\,m\,\ddot{x} + \,m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos\theta - \,m\,l\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + 2\,c\,x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,\dot{x}\,l\,\cos\theta + \,m\,l^2\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\,l\,\left[\ddot{x}\,\cos\theta - \,\dot{x}\,\sin\theta\,\dot{\theta}\right] + \,m\,l^2\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\,m\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,l\,\sin\theta - \,m\,g\,l\,\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \,\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m\,l\,\ddot{x}\,\cos\theta + \,m\,l^2\,\ddot{\theta} + \,m\,g\,l\,\sin\theta = 0$$

Gleichgewichtslage:

$$2\,c\,x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0$$

$$m\,g\,l\,\sin\theta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta = 0$$

Linearisierung:

$$2\,m\,\ddot{x} + \,m\,l\,\ddot{\theta} + \,2\,c\,x = 0$$

$$m\,l\,\ddot{x} + \,m\,l^2\,\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Ansatz:

$$x(t) = \,a_1\,\cos(\omega\,t - \psi) \qquad \theta(t) = \,a_2\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

$$x(t) = -\,a_1\,\omega^2\,\cos(\omega\,t - \psi) \qquad \theta(t) = -\,a_2\,\omega^2\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

Eigenfrequenzen:

$$2\,m\,\ddot{x} + \,m\,l\,\ddot{\theta} + \,2\,c\,x = 0 \qquad m\,l\,\ddot{x} + \,m\,l^2\,\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\theta = 0$$

$$(-2\,m\,\omega^2 + \,2\,c)\,a_1 + \,(-\,m\,l\,\omega^2)\,a_2 = 0 \qquad (-\,m\,l\,\omega^2)\,a_1 + \,(-\,m\,l^2\,\omega^2 + \,m\,g\,l)\,a_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-2\,m\,\omega^2 + \,2\,c) & -\,m\,l\,\omega^2 \\ -\,m\,l\,\omega^2 & -\,m\,l^2\,\omega^2 + \,m\,g\,l \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4\left(m^2\right) + \omega^2\,\left(-\,3\,c\,m\right) + \,c^2 = 0$$

Lösung:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,\frac{c}{m}}$$

Modalvektoren:

$$a_2 = \frac{(-2\,m\,\omega^2 + \,2\,c)\,a_1}{(m\,l\,\omega^2)} \qquad \text{für } \omega = \omega_1, \omega_2$$

$$\kappa_1 = \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} = \frac{3.24}{l} \qquad \boldsymbol{a}^{(1)} = a_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3.24}{l} \end{bmatrix}$$

$$\kappa_2 = \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{-1.24}{l} \qquad \boldsymbol{a}^{(2)} = a_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1.24}{l} \end{bmatrix}$$

Überprüfen mit Rayleigh-Quotienten :

$$R = \frac{\varphi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\varphi}{\varphi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\varphi}$$

c) Amplituden:

Lösungsart vom Typ der rechten Seite:

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{a}\cos(\Omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\boldsymbol{x}}_p = -\boldsymbol{a}\Omega^2\cos(\Omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf:

Die Amplituden können nun über die Cramer'sche Regel bestimmt werden

$$a_i = \frac{Z_i}{N}$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} F_1 & (k_{11} - m_{12}\Omega^2) \\ F_2 & (k_{22} - m_{22}\Omega^2) \end{vmatrix} \qquad Z_2 = \begin{vmatrix} (k_{11} - m_{11}\Omega^2) & F_1 \\ (k_{21} - m_{21}\Omega^2) & F_2 \end{vmatrix}$$

$$N = \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2\boldsymbol{M})$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} F_0 & (2c - ml\Omega^2) \\ 0 & (mgl - ml^2\Omega^2) \end{vmatrix} = F_0(mgl - ml^2\Omega^2) = F_0ml^2(\frac{g}{l} - \Omega^2)$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} (2c - 2m\Omega^2) & F_0 \\ (0 - ml\Omega^2) & 0 \end{vmatrix} = mlF_0\Omega^2$$

$$\begin{aligned} N &= \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2\boldsymbol{M}) \\ &= \begin{vmatrix} (2c - 2m\Omega^2) & (0 - ml\Omega^2) \\ (0 - ml\Omega^2) & (mgl - ml^2\Omega^2) \end{vmatrix} \\ &= (2c - 2m\Omega^2)(mgl - ml^2\Omega^2) - (ml\Omega^2)^2 \\ &= m^2l^2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2) \end{aligned}$$

d) Lösung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der modalen Transformation: Normierung der Eigenvektoren:

$$\Phi_1 = C_1 \boldsymbol{a}^{(1)}; \Phi_2 = C_2 \boldsymbol{a}^{(2)};$$

Einsetzen in die Normierungsvorschrift:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \Phi_i &= ml^2 \\ \Rightarrow C_1 &= 0.23l; \quad C_2 = 0.97l \end{aligned}$$

Modalmatrix:

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2] = \begin{bmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_1^2 \\ \Phi_2^1 & \Phi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.23l & 0.97l \\ 0.74 & -1.2 \end{bmatrix}$$

Einführung von Hauptschwingungskoordinaten:

$$\boldsymbol{x} = \Phi \boldsymbol{q}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_0 &= \Phi^{-1} \boldsymbol{x}_0 = -\frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1.2 & -0.97l \\ -0.74l & 0.23l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.74 \end{bmatrix} \frac{x_0}{l} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_0 &= \Phi^{-1} \dot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

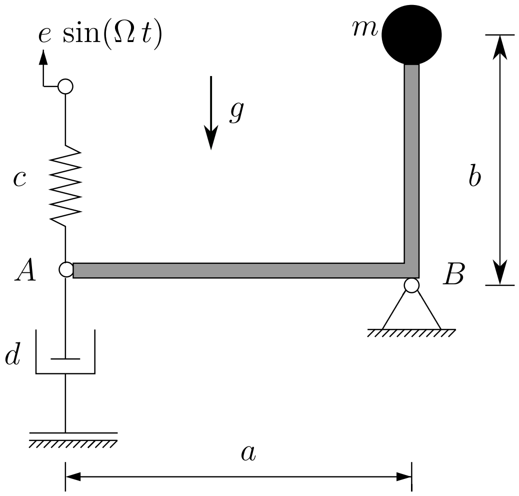
mit harmonischem Ansatz folgt für die Lösung:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1.2 \cos(\omega_1 t) \\ 0.74 \cos(\omega_2 t) \end{bmatrix} \frac{x_0}{l}$$

und somit

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.28l \cos(\omega_1 t) + 0.72l \cos(\omega_2 t) \\ 0.89 \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right) \end{bmatrix} \frac{x_0}{l}$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Am oberen Ende eines in B drehbar gelagerten, masselosen Rahmens ist die Punktmasse m angebracht. Im Punkt A des Rahmens sind ein Dämpfer mit Dämpfungskonstante d sowie eine Feder mit Federsteifigkeit c befestigt. Das System wird durch eine harmonische Bewegung des oberen Federendes zum Schwingen angeregt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Feder des unausgelenkten Systems entspannt.

a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem am Punkt B ein und schneiden Sie das System frei.

b) Stellen Sie die Schwingungsdifferentialgleichung für kleine Winkel auf.

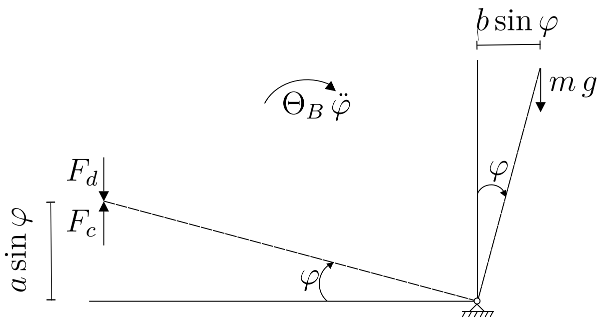
c) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung. Leiten Sie mit Hilfe der komplexen Erweiterung die Vergrößerungsfunktion her.

d) Bei welchem Frequenzverhältnissen erreicht die Vergrößerungsfunktion V ein Maximum oder Minimum (Nachweis erforderlich)?

Geg.: a, b, m, e, Ω, c, d, g

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt und KOS:



b) Aufstellen der Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\Theta_B\,\ddot{\varphi} - F_c\,a\,\cos\varphi + F_d\,a\,\cos\varphi - m\,g\,b\,\sin\varphi = 0$$

mit:

$$\Theta_B = m\,b^2$$
$$F_c = c\,x_c$$
$$F_d = d\,\dot{x}_d$$

Anmerkung: Erregung im Aufhängepunkt der Feder in Richtung x und x_F.

Kinematik:

$$x_c = e\,\sin(\Omega\,t) - a\,\sin\varphi$$
$$x_d = a\,\sin\varphi$$
$$\dot{x}_d = a\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

Einsetzen liefert:

$$m\,b^2\,\ddot{\varphi} - [\,e\,\sin(\,\Omega\,t\,) - a\,\sin\varphi\,]\,c\,a\,\cos\varphi + d\,a^2\,\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} - m\,g\,b\,\sin\varphi = 0$$

mit $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1$ für kleine Ausschläge folgt:

$$m\,b^2\,\ddot{\varphi} - e\,\sin(\,\Omega\,t\,)\,c\,a + c\,a^2\,\varphi + d\,a^2\,\dot{\varphi} - m\,g\,b\,\varphi = 0$$

Somit ergibt sich folgende Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{d\,a^2}{m\,b^2}\,\dot{\varphi} + \left[\frac{c\,a^2}{m\,b^2} - \frac{g}{b}\right]\varphi = \frac{c\,a\,e}{m\,b^2}\,\sin(\,\Omega\,t\,)$$

c) Bestimmung der partikulären Lösung durch den Ansatz:

$$\varphi_p = x_0\,V\,\sin(\,\Omega\,t - \gamma\,)$$

<u>Transformation in Eigenzeit:</u>

$$\tau = \omega_0 t \rightarrow \boxed{\frac{d}{d\tau}\cdot\omega_0 = \frac{d}{dt}}$$
$$\Leftrightarrow \varphi''\omega_0^2 + 2D\omega_0^2\varphi' + \omega^2\varphi = x_0\omega_0^2\sin(\eta\tau)$$
$$\Leftrightarrow \varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = x_0\sin(\eta\tau)$$

Lösung der Bewegungsgleichung:

allg: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$ ($\underbrace{\text{homogener Anteil}}_{\widehat{=}\,\text{Eigenschwingung}} + \underbrace{\text{partkulärer Anteil}}_{\widehat{=}\,\text{äußerer Anregung}}$)

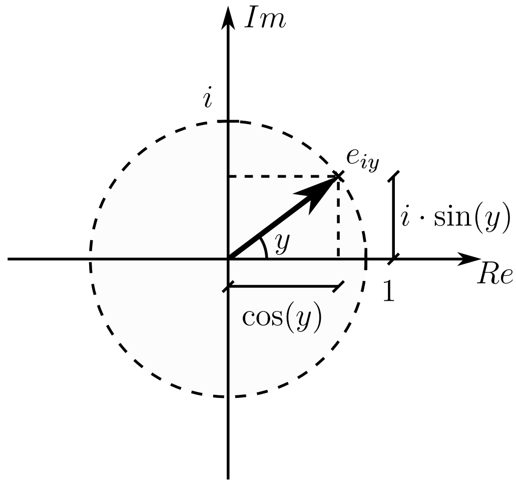
hier: Eigenschwingung gedämpft $\rightarrow$ nach außreichend langer Zeit bleibt Partikulärlösung übrig.

Partikulärlösung:
Herleitung der Vergrößerungsfunktion über komplexen Ansatz

$$\boxed{\varphi_p = \hat{y} V e^{i(\eta\tau - \gamma)}}$$

Dies entspricht dem Ansatz rechte Seite mit einer Erweiterung ins Komplexe

Eulerformel: $\quad e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$



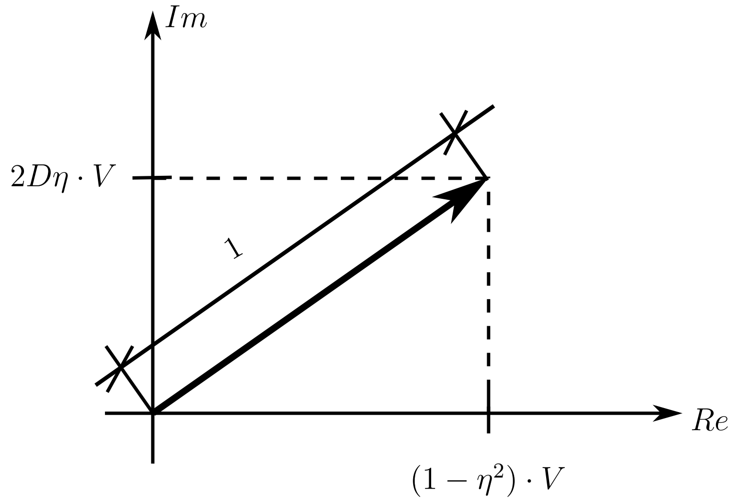
Idee: System schwingt gleichfrequent wie Anregung ($\eta\tau$)
aber möglicherweise mit anderer Amplitude (V) und Phasen verschoben (γ)

Ansatz in Bewegungsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_p = \hat{y} V e^{i(\eta\tau-\gamma)}\\
&\varphi_p' = i \cdot \eta \cdot \hat{y} V e^{i(\eta\tau-\gamma)} = i\eta\varphi_p \quad \text{(Ableitung in Eigenzeit!)}\\
&\varphi_p'' = -\eta^2 \varphi_p\\
\Rightarrow &-\eta^2\varphi_p + 2Di\eta\varphi_p + \varphi_p = \hat{y} \cdot \sqrt{1+4D^2\eta^2} \cdot e^{i\eta\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (-\eta^2 + 2Di\eta + 1) \cdot \hat{y} \cdot V \cdot e^{i(\eta\tau-\gamma)} = x_0\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(-\eta^2 + 2Di\eta + 1)V}_{\text{algebraische Darstellung}} = \underbrace{e^{i\gamma}}_{\text{exponentielle Darstellung}}
\end{aligned}$$

Zeigerdiagramm:



$$\Rightarrow \quad 4D^2\eta^2V^2 + (1-\eta^2)^2V^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = V_3 \quad \text{(Krafterregung)}$$

Für den Phasenwinkel gilt:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$$

d) Maximum des Verstärkungsfaktors V:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{((\,1-\eta^2\,)^2 + 4\,D^2\,\eta^2)^{3/2}}((\,-4+4\eta^2+8\,D^2)\,\eta) \equiv 0$$

Damit folgt

$$-4+4\eta^2+8\,D^2 = 0 \Leftrightarrow \eta = \sqrt{1-2\,D^2}$$