Prüfung in

Baudynamik

19. Februar 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				
Korrektur				

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

a) Wie ist das Lehr'sche Dämpfungsmaß D definiert? Welche Werte muss D annehmen, damit man den Fall der schwachen Dämpfung hat?

b) Was versteht man unter Schwingungsisolierung und in diesem Zusammenhang unter tiefer Abstimmung?

c) Weshalb muss die Determinante von $\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}$ für ungedämpfte Systeme ohne Erregung verschwinden? Leiten Sie kurz das Eigenwertproblem her.

d) Warum dürfen die Bewegungsgleichungen in der Baudynamik linearisiert werden?

e) Wie ist der Rayleigh-Quotient definiert? Wie kann man ihn physikalisch interpretieren?

f) Wie werden nicht konservative Kräfte im Lagrange-Formalismus behandelt, die man nicht als Potentialkräfte über die Energien herleiten kann?

Musterlösung - Aufgabe 1

a)

$$D = \frac{d}{2m\omega_0}$$

Schwach gedämpft für $0 \leq D \leq 1$

b) Unter Abschirmung versteht man die Aufgabe, die Fortpflanzung unvermeidbarer Bewegungen (Schwingungen) von einem Körper auf einen anderen zu verhindern oder zumindest so klein wie möglich zu halten. Dabei sind zwei Aufgabentypen zu betrachten, nämlich einmal die Abschirmung von Maschinen vom Restbauwerk (sog. Maschinenfundamente), zum anderen die Abschirmung eines Bauwerkes vom bewegten Boden (sog. Fundamenterregung). Im ersten Fall wird auch von aktiver Isolierung, im zweiten von passiver gesprochen.

Der Betrag von V_2 ist ein Maß für die Abschirmungs- oder Isolierwirkung. Kleine Werte von V_2 bedeuten geringe übertragene Kraft. Hierzu betrachten wir den speziellen Wert $\eta = \sqrt{2}$. Er ergibt $V_2 = 1$. Unabhängig von der Dämpfung ist $V_2 > 1$ für $\eta < \sqrt{2}$ und $V_2 < 1$ für $\eta > \sqrt{2}$

Eine Isolierwirkung findet deshalb erst bei überkritischer (tiefer) Abstimmung $\eta > \sqrt{2}$ statt.Sie ist umso ausgeprägter je kleiner D ist, Dämpfung verschlechtert die Isolierung.

c) Bewegungsgleichung:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Exponential-Ansatz:

$$\boldsymbol{q}_h = \boldsymbol{v}\exp(i\omega t)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} i^2\omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}\exp(i\omega t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}\exp(i\omega t) &= \boldsymbol{0} \\ \Rightarrow \left(-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} \\ \Rightarrow \det\left(-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right) &= 0 \end{aligned}$$

d) Bewegungsgleichungen können in der Baudynamik linearisiert werden, da man im Bauwesen in der Regel von kleinen Auslenkungen ausgeht. Große Auslenkungen sind konstruktiv zu unterbinden.

e)

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}} \geq \omega_1^2$$

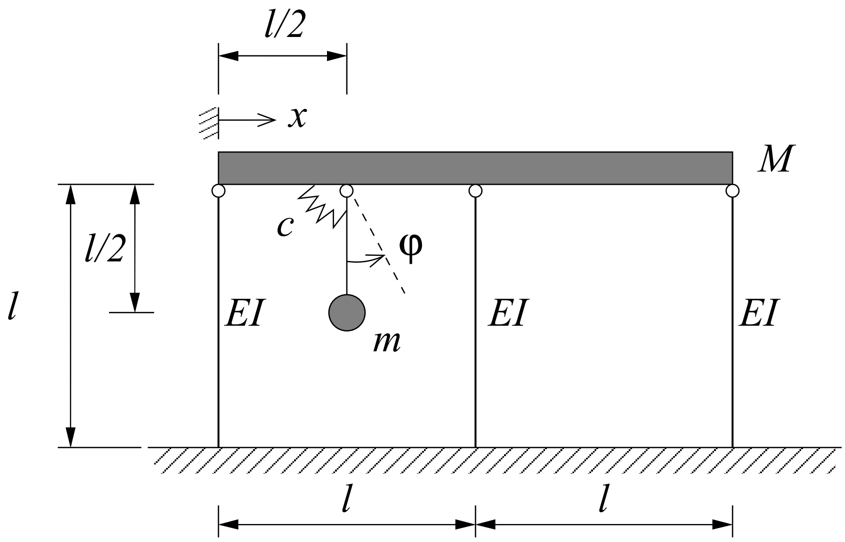
f) Generalisierte Kraft:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{q}}$$

Lagrange-2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}$$

2. Aufgabe: (ca. 60 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System eines Rahmens mit einem eingehängten Pendel soll auf das Schwingungsverhalten *für kleine Auslenkungen* untersucht werden. Der Rahmen besteht aus einem Riegel der Masse M und drei masselosen Stützen, die an einem Ende gelenkig verbunden und am anderen Ende eingespannt sind. Das Pendel besteht aus einer masselosen starren Stange der Länge $l/2$, einer Punktmasse m und einer Drehfeder der Steifigkeit c.

Gegeben: M, m, l, EI, c.

a) Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit k der drei Stützen an.

Im weiteren Verlauf der Aufgabe soll k als gegeben betrachtet werden.

b) Stellen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems auf. Verwenden Sie hierzu die Koordinaten x und φ. Der Einfluss der Erdbeschleunigung wird vernachlässigt.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems und stellen Sie diese in Matrix-Vektor-Schreibweise dar.

Im Weiteren kann davon ausgegangen werden, dass freie Schwingungen des Systems durch Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

beschrieben werden. Dabei werden die kinematischen Größen im Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Die Massenmatrix kann im Weiteren als

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & m\frac{l}{2} \\ m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{4} \end{bmatrix}$$

angenommen werden, analog wird die Steifigkeitsmatrix definiert als

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Hierbei wurde bereits $M = m$ zur Vereinfachung des Systems berücksichtigt.

d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems und stellen Sie diese graphisch dar. Nehmen Sie dabei $c = kl^2$ an.

e) Führen Sie eine Plausibilitätskontrolle Ihrer Ergebnisse durch Verwendung des Rayleighquotienten durch (mindestens 2 Abschätzungen).

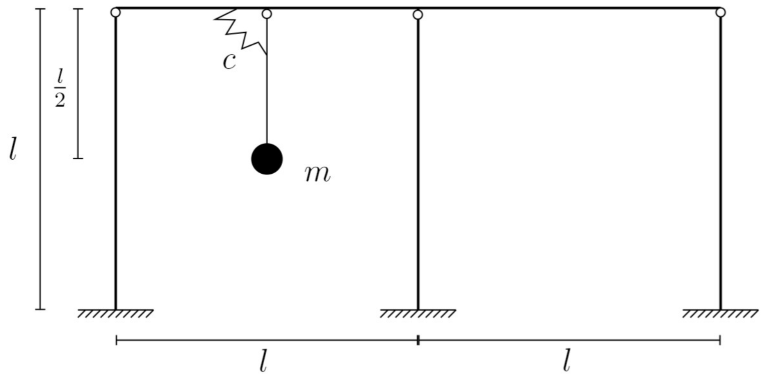
f) Äußere Einwirkungen führen auf eine Erregerkraft, die auf den Riegel in x-Richtung wirkt. Die Erregerkraft hat die Form

$$F = F_0 \cos(\Omega t)$$

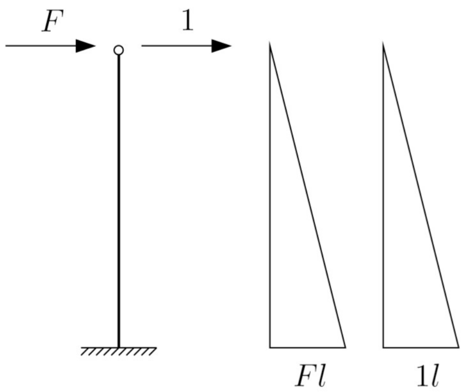
Bestimmen Sie die Amplituden der stationären Schwingungsantwort des Systems.

g) Bestimmen Sie nun die Ersatzfedersteifigkeit k so, dass das Pendel als Tilger wirkt.

Musterlösung - Aufgabe 2

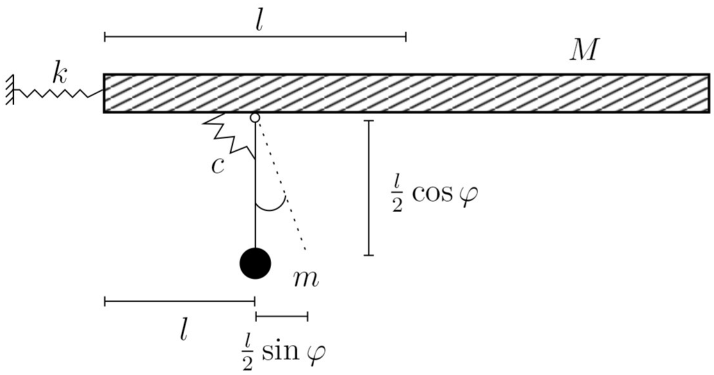


a) Ersatzfedern



$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot Fl\cdot l\cdot l\\
&= \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI}\\
k &= \frac{3EI}{l^3}\cdot 3 = \frac{9EI}{l^3}
\end{aligned}
$$

b) Ersatzsystem



$$
\begin{aligned}
r_1 &= \begin{bmatrix} x+l \\ 0 \end{bmatrix} & & r_1 = \begin{bmatrix} x+l \\ 0 \end{bmatrix} & & \dot r_1 = \begin{bmatrix} \dot x \\ 0 \end{bmatrix}\\
r_2 &= \begin{bmatrix} x+\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\cos\varphi \end{bmatrix} & \overset{\varphi<<1}{\Rightarrow} & r_2 = \begin{bmatrix} x+\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\varphi \\ \frac{l}{2}\cos \end{bmatrix} & \Rightarrow & \dot r_2 = \begin{bmatrix} \dot x+\frac{l}{2}\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\dot r_2 = \begin{bmatrix} \dot x + \frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi \\ -\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
|\dot r_2|^2 &= \dot x^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + l\cos\varphi\,\dot\varphi\dot x\\
&= \dot x^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + l\cos\varphi\,\dot\varphi\dot x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \underbrace{(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi})^2}_{=\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 + m\frac{l}{2}\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= kx \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= c\varphi
\end{aligned}
$$

c) Lagrange:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \overbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \overbrace{Q_i}^{=0}
$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} M+m & m\frac{l}{2} \\ m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

d) <u>Eigenfrequenzen</u>:

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) &= 0 \\
\Leftrightarrow \Big(k - \omega^2(2m)\Big)\left(kl^2 - \omega^2\frac{ml^2}{4}\right) - \left(\omega^4 m^2 \frac{l^2}{4}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(k^2l^2 - \omega^2\frac{mkl^2}{4}\right) - 2\left(\omega^2 mkl^2 - \omega^4\frac{m^2l^2}{4}\right) - \left(\omega^4 m^2\frac{l^2}{4}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(k^2 - \omega^2\frac{mk}{4}\right) - \left(2\omega^2 mk - \omega^4\frac{m^2}{4}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(4\frac{k^2}{m^2} - \omega^2\frac{k}{m}\right) - \left(8\omega^2\frac{k}{m} - \omega^4\right) &= 0 \\
\omega^4 - 9\frac{k}{m}\omega^2 + 4\frac{k^2}{m^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{9}{2}\frac{k}{m} \pm \frac{\sqrt{9^2 - 16}}{2}\frac{k}{m} & \\
\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{2}\frac{k}{m} &
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \omega_1^2 \approx 0.469\frac{k}{m}$

Eigenvektoren:

$$
\begin{aligned}
\kappa_i &= -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_{11}}{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}} \\
&= -\frac{k - \omega_i^2 (2m)}{0 - \omega_i^2 (m\frac{l}{2})} \\
&= \frac{k - \omega_i^2 (2m)}{\omega_i^2 (m\frac{l}{2})} \\
&= \frac{1}{l}\frac{\frac{k}{m} - 4\,\omega_i^2}{\omega_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1}{l}\frac{\frac{k}{m} - 4\,\omega_1^2}{\omega_1^2} \\
&= -\frac{1}{l}\frac{32 + 4\sqrt{65}}{9 + \sqrt{65}} \\
\kappa_2 &= -\frac{1}{l}\frac{4\sqrt{65} - 32}{\sqrt{65} - 9}
\end{aligned}
$$

e)

$$
R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}}
$$

1.Abschätzung :

$$
\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} = [1 \quad \frac{1}{l}]
$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}} \\
&= \frac{8\,k}{13\,m} \approx 0.62\frac{k}{m}
\end{aligned}
$$

2.Abschätzung :

$$
\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} = [1 - \frac{1}{l}]
$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}} \\
&= \frac{8\,k}{5\,m} \approx 1.6\frac{k}{m}
\end{aligned}
$$

Beide Abschätzungen sind größer als der zuvor berechnete Eigenwert. Die erste Schätzung liefert eine gute Näherung.

f) Lösungsart vom Typ der rechten Seite:

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{a}\cos(\Omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\boldsymbol{x}}_p = -\boldsymbol{a}\Omega^2\cos(\Omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}_p + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{F}\cos(\Omega t)$$
$$\Big(\boldsymbol{K} \;-\Omega^2\boldsymbol{M}\Big)\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

Die Amplituden können nun über die Cramer'sche Regel bestimmt werden

$$a_i = \frac{Z_i}{N}$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} F_1 & (k_{11} - m_{12}\Omega^2) \\ F_2 & (k_{22} - m_{22}\Omega^2) \end{vmatrix} \qquad Z_2 = \begin{vmatrix} (k_{11} - m_{11}\Omega^2) & F_1 \\ (k_{21} - m_{21}\Omega^2) & F_2 \end{vmatrix}$$

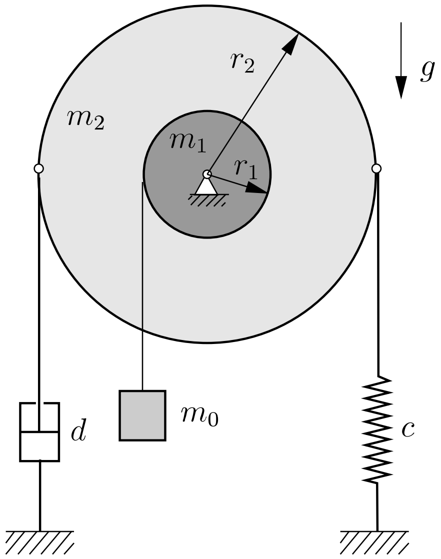
$$N = \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2\boldsymbol{M})$$

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \begin{vmatrix} F_0 & (k - m\frac{l}{2}\Omega^2) \\ 0 & (kl^2 - m\frac{l^2}{4}\Omega^2) \end{vmatrix} = F_0(kl^2 - m\frac{l^2}{4}\Omega^2) \\
Z_2 &= \begin{vmatrix} (k - 2m\Omega^2) & F_0 \\ (0 - m\frac{l}{2}\Omega^2) & 0 \end{vmatrix} = m\frac{l}{2}\Omega^2 F_0 \\
N &= \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2\boldsymbol{M}) \\
&= \begin{vmatrix} (k - 2m\Omega^2) & (k - m\frac{l}{2}\Omega^2) \\ (0 - m\frac{l}{2}\Omega^2) & (kl^2 - m\frac{l^2}{4}\Omega^2) \end{vmatrix} \\
&= l^2(k - 2m\Omega^2)(k - m\frac{1}{4}\Omega^2) + (k - m\frac{l}{2}\Omega^2)(m\frac{l}{2}\Omega^2) \\
&= \frac{\Omega^4\, l^2\, m^2}{4} - \frac{9\,\Omega^2\, k\, l^2\, m}{4} + k^2\, l^2
\end{aligned}$$

g) Pendler wirkt als Tilger:

$$\Rightarrow Z_1 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow F_0(kl^2 - m\frac{l^2}{4}\Omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow k = m\frac{1}{4}\Omega^2$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Zwei homogene Kreisscheiben (Radius r_1 bzw. r_2, Masse m_1 bzw. m_2) sind fest miteinander verbunden und reibungsfrei drehbar gelagert. An die große Scheibe sind eine Feder (Steifigkeit c) sowie ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) angeschlossen. An der kleinen Scheibe hängt eine Masse m_0.

Gegeben: r_1, r_2, m_1, m_2, d, m_0.

a) Schneiden Sie das System frei und stellen Sie die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Kreisscheiben auf (für kleine Winkel).

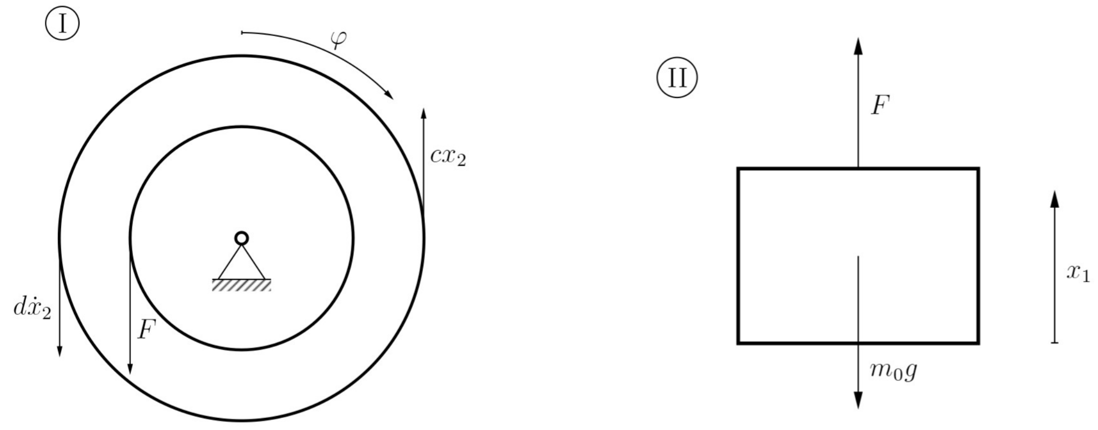
b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz (des ungedämpften Systems) sowie den Dämpfungsgrad der Drehschwingung des Systems.

c) Das System befinde sich im statischen Gleichgewicht bis das Seil, an dem die Masse m_0 hängt, reißt. Berechnen Sie die einsetzende Drehbewegung in Abhängigkeit der Zeit. Nehmen Sie dabei an, dass das System schwach gedämpft ist.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) <u>DGL</u>:

Freischnitt:



Kinematik:

$$x_1 = r_1\varphi\,,\; x_2 = r_2\varphi$$

GGW:

$$\begin{aligned} I \quad & J\ddot{\varphi} = -cx_2r_2 - d\dot{x}_2r_2 - Fr_1 && (1)\\ II \quad & m_0\ddot{x}_1 = F - m_0g \\ & \Rightarrow F = m_0(\ddot{x}_1 + g) && (2) \end{aligned}$$

(2) in (1):

$$\begin{aligned} & J\ddot{\varphi} + cx_2r_2 + d\dot{x}_2r_2 + m_0(\ddot{x}_1 + g)r_1 = 0 \\ & \Rightarrow (J + m_0r_1^2)\ddot{\varphi} + dr_2^2\dot{\varphi} + cr_2^2\varphi = -m_0r_1g \\ & \quad \text{mit } \overline{J} = J + m_0r_1^2 \text{ und } J = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2) \end{aligned}$$

b) <u>Eigenkreisfrequenz und Dämpfungsmaß</u>:

normierte DGL:

$$\ddot{\varphi} + \frac{dr_2^2}{\overline{J}}\dot{\varphi} + \frac{cr_2^2}{\overline{J}}\varphi = -\frac{m_0r_1}{\overline{J}}g$$

Eigenkreisfrequenz und Dämpfungsmaß:

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{cr_2^2}{\overline{J}}} \quad \text{und } 2D\omega = \frac{dr_2^2}{\overline{J}} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\frac{\frac{dr_2^2}{\overline{J}}}{\sqrt{\frac{cr_2^2}{\overline{J}}}} = \frac{dr_2}{2\sqrt{\overline{J}c}}$$

c) <u>Lösung homogene DGL</u>:

stat. Ruhelage : $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow cr_2^2\varphi_0 = \pm m_0 r_1 g \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pm m_0 r_1 g}{cr_2^2}$$

Anfangswerte:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0\,,\ \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

Lösungsansatz:

$\varphi(t) = e^{-\overline{D}\omega t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t))$

mit $\omega_d = \overline{\omega}\sqrt{1-\overline{D}^2}$

und $\overline{\omega} = \sqrt{\frac{cr_2^2}{J}}\,,\ \overline{D} = \frac{dr_2}{2\sqrt{Jc}}$

$\Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -\overline{D}\omega e^{-\overline{D}\omega t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)) + e^{-\overline{D}\omega t}(-A\omega_d\sin(\omega_d t) + B\omega_d\cos(\omega_d t))$

Bestimmung A und B:

$$\varphi(0) = A = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = -\overline{D}\omega A + B\omega_d = 0 \Rightarrow B = A\frac{\overline{D}}{\sqrt{1-\overline{D}^2}}$$